Qualificação 28 de julho de 2017 Doutorado - Álgebra Comutativa

Nome:

RA:

Todas as respostas têm que ser devidamente justificadas. Respostas sem justificativas serão completamente desconsideradas.

Exercício 1

- *(0,5 pontos)* Defina um módulo *flat*, fornecendo um exemplo.
- *(0,5 pontos)* Demonstre que se M e N são A-módulos flat, então $M \otimes_A N$ é flat também.
- *(0,5 pontos)* Demonstre que se B é uma A-álgebra flat e N é um B-módulo flat, então N é um A-módulo flat.

Exercício 2

- *(0,5 pontos)* Defina ideal primário e decomposição primaria minimal.
- *(0,5 pontos)*Comente sobre a unicidade da decomposição, demonstrando a veracidade ou fornecendo um contraexemplo.
- *(1,5 pontos)* Defina anel Noetheriano e demonstre que se A for um anel Noetheriano, todo ideal admite uma decomposição primária.
- *(1,5 pontos)* Enuncie e demonstre o Teorema da Base de Hilbert
- *(1 ponto)* Seja A um anel tal que o anel local $A_{\mathfrak{p}}$ é Noetheriano para todo primo $\mathfrak{p} \subset A$. O anel A é necessariamente Noetheriano?
- *(1,5 pontos)* Defina anel Artiniano. Podemos afirmar que un anel Artiniano é necessariamente Noetheriano? E a reciproca?
- *(1 ponto)* Determine se os seguintes anéis são Noetherianos e/ou Artinianos e determine a dimensão de Krull deles.
$$\mathbb{C}[x,y] \qquad \frac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^2, xy, y^3)}$$

Exercício 3

- *(1 ponto)* Enuncie os teoremas de *Going up* e *Going down*
- *(1 ponto)* Consideramos dois domínios integrais $B \subset A$ com B integralmente fechado e A integral sobre B, e consideramos também $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de A e $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$. Demonstre que $\mathfrak{n}$ é maximal e $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim B_{\mathfrak{n}}$.

Exame de Qualificação, Doutorado
Álgebra Não Comutativa
28 de julho de 2017

1. a) (0,5 pt) Definir anel primitivo. Enunciar o teorema sobre a densidade.

b) (1 pt) Se R é um anel primitivo e $e \in R$ é um idempotente, mostrar que o anel eRe é também primitivo.

c) (0,75 pt) Seja $A \neq 0$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Mostrar que A é primitiva se e somente se ela é simples.

d) (0,75 pt) Seja $A = UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre o corpo F. Encontrar os ideais minimais à direita e à esquerda de A. Mostrar que a soma dos ideais minimais à direita em A não coincide com a soma dos ideais minimais à esquerda em A.

2. a) (1 pt) Definir o radical de Jacobson $J(R)$ de um anel R. Mostrar que o radical de Jacobson de um anel artiniano (à direita) é um ideal nilpotente.

b) (0,75 pt) Se $A = UT_n(F)$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre o corpo F, qual o radical de Jacobson de A?

c) (0,75 pt) Se R é qualquer anel, mostrar que

$$J \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(R) & R \\ 0 & J(R) \end{pmatrix}.$$

d) (0,5 pt) Se $R = \mathbb{Z}_{360}$, o anel dos resíduos módulo 360, qual o radical de Jacobson do anel de (c)?

3. a) (1,5 pt) Enunciar e demonstrar o teorema de Wedderburn e Artin.

b) (1 pt) Seja C_3 o grupo cíclico de ordem 3. Decompor a álgebra do grupo $\mathbb{C}[C_3]$ em soma direta de álgebras simples. Qual a decomposição de $\mathbb{R}[C_3]$ em álgebras simples?

4. a) (1 pt) Definir o grupo de Brauer de um corpo F. Qual o grupo de Brauer dos complexos? E dos reais? (Justificar!)

b) (0,5 pt) Seja A uma álgebra central e simples sobre o corpo F, $\dim A = 4$. Se $a \in A$ e $a \notin F$, mostrar que o centralizador de a em A, $C_A(a)$, coincide com $F \oplus Fa$. (Dica: Se F é algebricamente fechado, usar a forma canônica de Jordan de a.)

Exame de Qualificação, Doutorado
Álgebras de Lie

28 de julho de 2017

1. a) (1,3 pt) Enunciar e demonstrar o teorema de Lie.

b) (0,7 pt) Seja L uma álgebra de Lie solúvel e de dimensão finita sobre o corpo K. Seja V um L-módulo irredutível e de dimensão $n < \infty$. Quais valores pode assumir n se $K = \mathbb{C}$? E se $K = \mathbb{R}$?

2. a) (0,5 pt) Definir a forma de Killing (Cartan). Definir álgebra de Lie semissimples.

b) (1,5 pt) Mostrar que se L é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ cuja forma de Killing é não degenerada, então L é semissimples.

3. a) (0,2 pt) Fazer o diagrama de Dynkin do sistema de raízes do tipo C_3.

b) (0,3 pt) Descrever o sistema de raízes a partir do diagrama de Dynkin do item (a).

c) (0,5 pt) Quais são os sistemas de raízes constituídos pelas raízes longas e curtas?

4. (1 pt) Quais são as álgebras de Lie simples (sobre $\mathbb{C}$) de dimensão 12? De dimensão 15? E de dimensão 21?

5. (1 pt) Seja L uma álgebra de Lie semissimples sobre $\mathbb{C}$. Se $\dim L = 3$ mostrar que $L \cong sl_2(\mathbb{C})$.

6. (1 pt) Seja $L = L(x, y)$ a álgebra livre de Lie de dois geradores livres x e y, e seja $M = L^2$ a álgebra derivada de L. Responder, com a devida justificativa, se $L \cong M$ ou não.

7. (2 pt) Seja $L = sl_2(\mathbb{C})$ e seja $V = sl_3(\mathbb{C})$. Consideramos $L \subset V$ como sendo as matrizes 3×3 com zeros na última linha e na última coluna, e consideramos V como um L-módulo através da representação adjunta.

a) Qual a decomposição de V em soma direta de irredutíveis?

b) Para cada um desses irredutíveis, encontrar um vetor de peso máximo.

Exame de Qualificação
Análise Funcional

24 de Julho de 2017

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Nome:____

RA:____

Assinatura:_____________________________________

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

(1) Seja X um espaço vetorial normado sobre o campo F.

(a) (**1 ponto**) Mostre que para cada $x_0 \in X$, existe $f_0 \in X^*$ tal que

$$\|f_0\|_{X^*} = \|x_0\|_X \qquad \text{e} \qquad \langle \mathrm{f_0, x_0} \rangle = \|\mathrm{x_0}\|^2.$$

O que pode dizer sobre a unicidade de f_0 ?

(b) (**1 ponto**) Mostre que, para todo $x \in X$

$$\|x\|_X = \sup\{|\langle f, x\rangle| : f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1\} = \max\{|\langle f, x\rangle| : f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1\}.$$

(2) (**1.5+0.5 pontos**) Seja X um espaço vetorial normado sobre o campo F. Prove que X é completo se e somente se toda série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutamente convergente em X é uma série convergente em X. Dê um exemplo de um espaço incompleto Y e a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ em Y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$ mas $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ não converge em Y.

(3) Sejam X, Y espaços vetoriais normados sobre um campo F e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

(a) (**1 ponto**) Se $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \subset Y \to X$ existe, mostre que em geral T^{-1} não é limitado.

(b) (**1 ponto**) Se T é sobrejetivo e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\| \leq C\|Tx\|, \qquad \forall\, x \in X,$$

então mostre que $T^{-1} : Y \to X$ existe e é limitado.

(4) (a) (**1 ponto**) Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subset H$ uma sequencia tal que $x_n \rightharpoonup x \in H$. Mostre que $x_n \to x$ se e somente se $\|x_n\| \to \|x\|$.

(b) (**1 ponto**) Seja H espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{B}(H)$. Mostre que $\langle x, Tx\rangle = 0$ para todo $x \in X$ implica $T = 0$. Sera que esta afirmação vale no caso real?

(5) Seja H um espaço de Hilbert separável e $T \in \mathcal{B}(H)$.

(a) (**1 ponto**) Mostre que se T é compacto, então existe uma sequencia $\{T_n\}$ de operadores de posto finito em H tal que $T_n \to T$ na topologia da norma.

(b) (**1 ponto**) Mostre que T é compacto se e somente se T^* é compacto.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO
MM423 - GEOMETRIA RIEMANNIANA
26/07/2017

Nome: **RA:**

(1) Seja M uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, equipada com a métrica induzida. Prove que a curvatura seccional e a curvatura de Gauss de M coincidem em cada ponto $p \in M$.

(2) Verdadeiro ou Falso ? Justifique suas respostas.
   (a) A esfera S^3 admite uma métrica completa com $K < 0$.
   (b) Existe uma variedade de dimensão 3, com curvatura seccional constante e positiva, e que não seja difeomorfa a S^3 ou a $\mathbb{RP}^3$.
   (c) Se uma variedade M admite uma métria riemanniana g tal que $K < 0$, então para quaisquer pontos $p, q \in (M, g)$ existe uma geodésica minimizante γ que liga p até q.

(3) Enuncie o Teorema de Bonnet-Myers. Dê exemplo de uma variedade riemanniana completa $M \subset \mathbb{R}^n$ não compacta e com $K > 0$. Isso contradiz o Teorema de Bonnet-Myers? Justifique sua resposta detalhadamente.

(4) (a) Dê exemplo de variedade M e duas métricas riemannianas g_1, g_2 tal que (M, g_1) é completa e (M, g_2) não é completa. Justifique todos seus argumentos.
   (b) Suponha que (M, g) admita uma função própria (imagem inversa de conjuntos compactos são compactos) e Lipschitz $f : M \to \mathbb{R}$. Mostre que M é completa.

(5) Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Seja H um grupo de Lie e $h : H \to G$ uma imersão que é um homomorfismo de grupo. Mostre que h é uma imersão totalmente geodésica.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO
MM448 - GRUPOS DE LIE
26/07/2017

Nome: **RA:**

(1) Seja G um grupo de Lie conexo e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Seja também $K \subset G$ um subgrupo compacto e suponha que $\dim K - \dim(K \cap H) = \dim G/H$. Mostre que K age transitivamente em G/H.

(2) Seja G um grupo de Lie solúvel e $H \subset G$ um subgrupo compacto e conexo. Mostre que H é um toro.

(3) Sejam G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal de codimensão 1. Mostre que $\langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ é fechado. Dê um exemplo de que a hipótese de G ser simplesmente conexo não pode ser retirada.

(4) Mostre que um grupo de Lie solúvel, conexo e simplesmente conexo G admite um sistema de coordenadas global de segunda espécie, isto é, existe uma base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ tal que a aplicação $\phi(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{e}^{t_1 X_1} \cdots \mathrm{e}^{t_n X_n}$ é um difeomorfismo.

(5) Seja H um subgrupo de Lie com uma quantidade no máximo enumerável de componentes conexas e $\dim H < \dim G$. Mostre que H tem interior não vazio em G.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO
MM447 - TOPOLOGIA ALGÉBRICA
26/07/2017

Nome: **RA:**

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1) Seja (X, E) um complexo CW e denote por α_i ao número de $i-$ células em E. Mostrar que a característica de Euler é dada por

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i$$

onde $\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{posto}(H_i(X))$.

2) Calcule os seguintes grupos de homologia

- i- $H_*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{R})$,
- ii- $H_*(S^4 \times S^2, \mathbb{Z}_4)$
- iii- $H_*(K, \mathbb{Z}_2)$ para K a garrafa de Klein.
- iv- $H_*(\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2, \mathbb{R})$.
- v- O grupo $H_2(\mathbb{C}P^1 \times S^3)$

3) Responda Verdadeiro ou Falso. Justifique.

- i- S^n tem um campo vetorial não nulo se, e somente se, n é ímpar.
- ii- Seja M um meridiano da esfera S^2 que conecta o polo norte N e o polo sul S (i.e. N e $S \in M$) e $p \in M$. Então $(S^2 - p, M - p) \to (S^2, M)$ não é uma excisão.
- iii- $S^2 \vee S^4$ e $\mathbb{C}P^2$ tem os mesmos grupos de Homologia.
- iv- $S^1 \vee S^1$ é um retrato de $S^1 \times S^1$.

4) Seja G um grupo. Um espaço $K(G, 1)$ é um espaço conexo por caminhos com cobrimento universal contráctil e cujo grupo fundamental é isomorfo a G.

- i- De um exemplo de um $K(\mathbb{Z}, 1)$ espaço e de um $K(\mathbb{Z}^2, 1)$ espaço.
- ii- Mostrar que se X é um complexo CW conexo e G é um grupo tal que todo homomorfismo $\phi : \pi_1(X) \to G$ é trivial então todo mapa $f : X \to K(G, 1)$ é homotopicamente nulo.

5) Achar um exemplo onde o teorema de excisão não se aplica. Justificar.