MM719 - 1S 2018 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________

Escolher itens cujo total de pontos possíveis não ultrapasse 10,5 (existem 12 pontos disponíveis). Salvo menção em contrário, V denota um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. **Todas as respostas devem ser devidamente justificadas** (contas são justificativas). Bom trabalho!

1. Suponha que T seja um operador linear num espaço vetorial real V de dimensão finita cujos fatores invariantes são:
$$f_1(t) = t^2(t-1)^4(t-\pi)^3, \qquad f_2(t) = t^2(t-1)^2(t-\pi) \qquad \text{e} \qquad f_3(t) = (t-1)(t-\pi).$$
   (a) (0,5) Encontre os polinômios mínimo e característico de T.
   (b) (0,8) Encontre uma forma canônica de Jordan para T.

2. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear dada por
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_3 + x_4, 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4, x_3 + x_4, 3x_4 - x_3).$$
   (a) (1,0) Encontre uma base de Jordan com respeito a T.
   (b) (0,5) Calcule os fatores invariantes de T.
   (c) (1,0) Descreva todos os subespaços T-invariantes.

3. Seja V o espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2 e considere as funções $f_i : V \to \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, dadas por
$$f_1(p) = p(0), \qquad f_2(p) = p'(1), \qquad f_3(p) = \int_0^1 p''(t)dt.$$
   (a) (0,8) Verifique que $f_i \in V^*$ para $i = 1, 2, 3$ e que $\beta = \{f_1, f_2, f_3\}$ é base de V^*.
   (b) (0,7) Encontre base α de V de modo que β seja sua base dual.

4. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (0,5) Se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, então V^* é isomorfo a $V_1^* \oplus V_2^* \oplus \cdots \oplus V_m^*$.
   (b) (0,5) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $PAP^{-1} = A^t$.
   (c) (0,5) Para todo operador linear T em um espaço vetorial real qualquer se tem $\{f \in \mathbb{R}[t] : f(T) = 0\} \neq \{0\}$.
   (d) (0,5) A imagem de uma função multilinear é um subespaço de seu contradomínio.
   (e) (0,5) Se W é um subespaço de V, todo elemento de W^* é a restrição a W de um elemento de V^*.

5. Considere a forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ dada por $q(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$ e seja ϕ a forma bilinear simétrica tal que $q(v) = \phi(v, v)$. Considere também o operador linear T em $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle T(e_i), e_j\rangle = \phi(e_i, e_j)$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq 3$ sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica e $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.
   (a) (1,0) Encontre base β de $\mathbb{R}^3$ com respeito a qual as representações matriciais $[T]_\beta^\beta$ de T e $[\phi]_\beta$ de ϕ sejam diagonais.
   (b) (0,5) Calcule a assinatura de ϕ.
   (c) (0,7) Dê exemplo de uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[\phi]_\gamma$ é diagonal, mas $[T]_\gamma^\gamma$ não é diagonal.

6. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$.
   (a) (1,0) Mostre que existe única transformação linear $\Gamma : V \otimes W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^*, W)$ satisfazendo
$$\Gamma(v \otimes w)(f) = f(v)w \qquad \text{para quaisquer} \qquad v \in V, w \in W, f \in V^*.$$
   (b) (1,0) Mostre que, se $\dim(V) < \infty$, Γ é um isomorfismo.

EXAME DE ANÁLISE NO RN

DM–IMECC–UNICAMP, 16 de Julho de 2018

Nome:____ **RA:**________________

1. a) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$. Defina o que significa f ser diferenciável em um ponto $a \in U$.

   b) Seja $f : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ dada por $f(A) = A^2$ onde $M_{n\times n}$ denota o espaço das matrizes n por n (esse espaço é naturalmente associado ao espaço $\mathbb{R}^{n^2}$). Determine a derivada do mapa f.

2. Seja p um polinômio com coeficientes reais e $grau(p) \geq 1$. Defina a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = (p(x + y), p(x - y))$. Prove que existe um conjunto aberto e denso de pontos de $\mathbb{R}^2$ para os quais o mapa f é um difeomorfismo local quando restrito a alguma vizinhança de cada um desses pontos.

3. a) Enuncie o teorema da função implícita.

   b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um mapa suave e tal que $y \in \mathbb{R}$ é um valor regular. Prove que $f^{-1}(y)$ é uma variedade e calcule a dimensão desta variedade.

4. Prove que a 1-forma definida em $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dada por

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

   é uma forma fechada, mas nao é exata.

5. a) Defina o que é uma variedade orientável.

   b) Disserte sobre o teorema de Stokes (e.g. enuncie o teorema, dê uma aplicação,...)

EQ Mestrado Topologia Geral - 18 de julho de 2018

Nome: R.A.:

Exercício 1. *(4pt) Responda verdadeiro ou falso para as afirmações abaixo, dando uma demonstração ou um contra-exemplo para justificar cada resposta.*

1. *Todo conjunto compacto é fechado;*
2. *A exponencial complexa* $e^{it} = \cos t + i \sin t$ *fornece um homeomorfismo entre o intervalo* $[0, 2\pi)$ *e o circulo* S^1*;*
3. *Seja* $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ *o disco bidimensional. Então, toda função contínua* $f : D^2 \to D^2$ *possui ponto fixo;*
4. *Se* $p_1 : X \times Y \to X$ *é a projeção no primeiro fator, então* p_1 *é uma aplicação fechada.*

Escolha 3 das questões abaixo para responder:

Exercício 2. *(2pt) Seja* $f : X \to Y$ *uma função qualquer. Sendo* Y *compacto e Hausdorff, mostre que* f *é contínua se, e só se, o gráfico de* f*,*

$$\Gamma(f) = \{x \times f(x) \mid x \in X\}$$

é fechado.

Exercício 3. *(2pt) Mostre que todo espaço métrico compacto é segundo contável.*

Exercício 4. *(2pt) Seja* $p : E \to B$ *um recobrimento. Mostre que se* B *é compacto e* $p^{-1}(b)$ *é finito para todo* $b \in B$*, então* E *é compacto.*

Exercício 5. *(2pt) Seja* X *um espaço topológico compacto e* Y *um espaço topológico Hausdorff. Mostre que toda aplicação contínua e bijetora* $f : X \to Y$ *é um homeomorfismo. Com base nisto decida se pode existir ou não uma curva de Peano injetora.*

Exercício 6. *(2pt) Mostre que um mapa* $f : S^1 \to X$*, onde* X *é um espaço topológico arbitrário, é homotópico a um mapa constante se, e só se, existe uma extensão de* f *para o disco* D^2*.*