EXAME DE ANÁLISE FUNCIONAL

DM–IMECC–UNICAMP, 16 de Julho de 2018

Nome:____ **RA:**________________

1. Demonstre as seguintes afirmações ou exiba um contra-exemplo:

   (a) Sejam E um espaço vetorial normado e S um subespaço vetorial fechado de E^*. Então $(S^\perp)^\perp = S$.

   (b) Seja X um espaço de Banach separável. Então X^* é separável.

   (c) Seja H um espaço de Hilbert. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência que converge fracamente a x em H e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ um sequência que converge fortemente a y em H. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$.

   (d) Seja H um espaço de Hilbert e P uma projeção ortogonal sobre um subespaço fechado S de H. Então P é um operador autoadjunto.

2. Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, real ou complexo, S um subespaço vetorial de E, $x \in E - S$ e $\delta = \inf_{y\in S} \|x - y\|$. Mostre que existe um funcional linear contínuo $f : E \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tal que $f(x) = \delta$, $\|f\| = 1$ e $f|S = 0$ ($f(y) = 0$, $\forall y \in S$). Conclua que se S é fechado então existe um funcional linear contínuo $f : E \to \mathbb{K}$ tal que $f(x) \neq 0$ e $f|S = 0$.

3. Sejam $p \in [1, \infty)$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência numérica tal que $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n < \infty$ para toda sequência $(x_n) \in l_p$. Mostre que a sequência $(y_n) \in l_q$, onde q é expoente dual de p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   Sugestão: defina $\varphi_j(x) = \sum_{n=1}^j x_n y_n$.

4. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Mostre que qualquer vizinhança na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ de um ponto $x_0 \in E$, arbitrário, contém uma reta passando por x_0. Conclua que a bola $B = \{x \in E; \|x\| < 1\}$ tem interior vazio na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.

5. Seja $T : l_2 \to l_2$ o operador linear dado por $(T(x))_n = \frac{x_n}{2^n}$, $x = (x_n)_{n=1}^\infty$.

   (a) Mostre que T é um operador limitado, compacto e autoadjunto.

   (b) Calcule a norma de T e seus espectros pontual, contínuo e residual.

EQ Doutorado Geometria Riemanniana - 18 de julho de 2018

Nome: R.A.:

Exercício 1. *(4pt) Responda verdadeiro ou falso para as afirmações abaixo, dando uma demonstração ou um contra-exemplo para justificar cada resposta.*

1. *Variedades riemannianas de curvatura não positiva podem ser compactas;*
2. *Todo campo de Killing é um campo de Jacobi;*
3. *Todo ponto em uma variedade riemanniana possui uma vizinhança geodesicamente convexa;*
4. *Todo ponto em uma variedade riemanniana possui uma vizinhança e um sistema de coordenadas nesta vizinhança tal que os vetores coordenados são ortonormais.*

Escolha 3 das questões abaixo para responder:

Exercício 2. *(2pt) Seja $\{e_i\}$ um referencial qualquer para TM em torno de um ponto $p \in (M, g)$. Suponha que a conexão é dada neste referencial por $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$. Calcule $\nabla_X \omega$ com ω uma 1-forma expressa no referencial dual e X no referencial dado acima.*

Exercício 3. *(2pt) Mostre que toda variedade homogênea é completa.*

Exercício 4. *(2pt) Mostre, rigorosamente, que uma isometria leva geodésicas em geodésicas.*

Exercício 5. *(2pt) Seja $N \subset (M, g)$ uma subvariedade riemanniana. Defina a segunda forma fundamental desta subvariedade e explique como o conceito clássico de segunda forma fundamental para superfícies em $\mathbb{R}^3$ é obtido a partir desta definição.*

Exercício 6. *(2pt) Mostre que o toro (como variedade abstrata) não admite uma métrica de curvatura positiva.*

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO
MM448 - GRUPOS DE LIE
18 de Julho de 2018

Nome: **RA:**

Faça 5 dentre as 6 questões abaixo.

1. Encontre todos os homomorfismos diferenciáveis $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. (Dica: Encontre os homomorfismos infinitesimais $\theta : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.)

2. Mostre que a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$ é semisimples usando o fato de que $\mathrm{SU}(n)$ é compacto e simplesmente conexo.

3. Seja G um grupo de Lie, $H \subset G$ um subgrupo fechado e $M \subset G$ uma subvariedade, tais que a aplicação $\phi : M \times H \to G$ dada por $\phi(x, y) = xy$ é um difeomorfismo. Mostre que G/H é difeomorfo a M.

4. Suponha que H é um grupo de Lie conexo e não fechado. Mostre que existe uma sequência $(h_n) \subset H$ tal que, para todo compacto da topologia intrínseca $K \subset H$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_n \notin K$ e, no entanto, $h_n \to e$ na topologia de G.

5. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $H, K \subset G$ subgrupos de Lie com respectivas subalgebras de Lie $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ satisfazendo $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. Mostre que H e K são fechados em G se $H \cap K$ é um subgrupo discreto de G.

6. Considere $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e forme o produto semi-direto $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times_\theta \mathbb{R}^2$ definido pelo homomorfismo $\theta : \mathbb{R} \to \mathrm{Der}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ onde $\theta(t) = tA$. Mostre que se G é o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ então a aplicação exponencial de G é sobrejetora se, e somente se, nenhum do auto-valores de A é imaginário puro. (Dica: Mostre que $\mathfrak{g} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & tA \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2 \right\}$)

Boa Prova!

EQ Doutorado Topologia Algébrica - 18 de julho de 2018

Nome: R.A.:

Exercício 1. *(4pt) Responda verdadeiro ou falso para as afirmações abaixo, dando uma demonstração ou um contra-exemplo para justificar cada resposta.*

1. *Toda superfície de Riemann (variedade bidimensional mergulhada em $\mathbb{R}^3$) possui grupo fundamental abeliano;*
2. *Sendo X um espaço topológico com recobrimento universal $\pi : \tilde{X} \to X$, todo mapa $f : S^1 \to X$ levanta para $\tilde{f} : S^1 \to \tilde{X}$;*
3. *As homologias com coeficientes inteiros e com coeficientes reais de um espaço topológico são equivalentes;*
4. *Se dois espaços topológicos* **não são** *homeomorfos então os seus grupos de homologia são distintos.*

Escolha 3 das questões abaixo para responder:

Exercício 2. *(2pt) Encontre os grupos de homologia da garrafa de Klein.*

Exercício 3. *(2pt) Para demonstrar que S^2 é simplesmente conexo, explique a necessidade do teorema de Van Kampen. (Existe demonstração alternativa usando outro teorema igualmente potente. Qual?)*

Exercício 4. *(2pt) Mostre que se $f : S^2 \to S^2$ não possui pontos fixos então f tem grau -1.*

Exercício 5. *(2pt) Qual é o análogo cohomológico do teorema de van Kampen? Dê um exemplo de aplicação.*

Exercício 6. *(2pt) Dada uma sequência exata curta de complexos de cadeias $0 \to A \to B \to C \to 0$, mostre como construir o mapa que dá origem a sequência exata longa de homologia.*