Departamento de Matemática – IMECC – Unicamp
Exame de Análise Funcional – 9 de dezembro de 2013.

Nome:______________________________________

RA:____

1. Questão. Considere o espaço de Banach real $C([0,1])$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ e defina

$$M := \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}.$$

(a) (0.5) Fixada $g \in C([0,1])$, encontre uma expressão simples para a classe $g+M \in C([0,1])/M$.
(b) (0.5) Se $\|\cdot\|$ é a norma usual em $C([0,1])/M$, verifique que

$$\|g+M\| = |g(0)|.$$

(c) (1.0) Encontre um espaço vetorial normado familiar que é isometricamente isomorfo ao espaço $C([0,1])/M$.

2. Questão. (1.5) Considere novamente o espaço de Banach real $C([0,1])$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ e defina

$$A := \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ é constante em } [0,1]\}.$$

Defina o funcional linear $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ por $\varphi(f_c) = c$, onde f_c denota a função constante com valor $c \in \mathbb{R}$. Sejam $g_0 \in C([0,1])$ dada por $g_0(x) = x$ e

$$B = \{f_c + \lambda g_0 \mid f_c \in A \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

É possível encontrar $\tilde{\varphi}\colon B \to \mathbb{R}$ linear e contínuo com $\tilde{\varphi}\big|_A = \varphi$ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$? Em caso afirmativo, encontre um tal funcional.

3. Questão. (1.5) Seja H um espaço de Hilbert e $A\colon H \to H$ um operador linear tal que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \quad \text{para quaisquer } x, y \in H.$$

Demonstre que A é um operador linear limitado.

4. Questão. Defina $P\colon L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ por

$$Pf(t) = tf(t).$$

a) [0.5] Demonstre que P está bem definido e é um operador limitado.

b) [1.0] Demonstre que P não possui autovalores.

c) [0.5] Para cada $g \in L^2([a,b])$ e cada $\lambda \notin [a,b]$, defina

$$h(t) := \frac{g(t)}{t-\lambda}.$$

Verifique que $h \in L^2([a,b])$ e que $(P-\lambda I)h = g$.

d) [1.0] A afirmação $\sigma(P) \subset [a,b]$ é falsa ou verdadeira? Justifique.

5. Questão. (2.0) Seja X um espaço de Banach e $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com domínio $D(A)$. Demonstre que $D(A)$ com a norma

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_X$$

é um espaço de Banach. Demonstre ainda que se $0 \in \rho(A)$ então as normas $\|\cdot\|_{D(A)}$ e

$$\|x\|_A := \|Ax\|_X$$

em $D(A)$ são equivalentes.

Boa Prova!

Departamento de Matemática – IMECC – Unicamp

Exame de Equações Diferenciais Parciais I – 09 de dezembro de 2013.

Nome:______________________________________

RA:____

1. Questão. Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

(a)(1.0) Se $-\Delta u = \lambda u$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = 0$ com $\lambda < 0$, então $u \equiv 0$.

(b)(1.0) Seja $K \in \mathbb{R}$ e suponha que $u(x) \geq K$ para $x \in \partial\Omega$ e que $\Delta u \leq 0$ em Ω. Mostre que $u \geq K$ em Ω.

2. Questão.(2.5) Encontre a função de Green do semi-espaço $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n);\, x' \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ e } x_n > 0\}$, onde $n \geq 3$. Para $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, encontre a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g, \quad \text{em } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}.$$

3. Questão.(2.0) Seja $c \in \mathbb{R}$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Encontre uma fórmula explícita para uma solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f(x,t), \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \text{ em } \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Sugestão: Use a mudança $v = e^{ct}u$.

4. Questão.(2.5) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Mostre que existe no máximo uma solução $u \in C^2(\overline{U} \times [0,\infty))$ para o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \text{ em } U \times (0,\infty) \\ u = f,\ u_t = g, \text{ em } \bar{U} \times \{t = 0\} \\ u = 0 \qquad \text{em } \partial U \times [0,\infty) \end{cases}.$$

5. Questão.(1.0) Seja $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tal que $\langle xF, \varphi \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$; isto é $xF = 0$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F = c\delta_0$, onde δ_0 é a delta de Dirac em 0.

Boa Prova!

Exame de Qualificação ao Doutorado
Álgebra Não Comutativa

Dezembro de 2013

1. Definir os conceitos a seguir: *anel primitivo* , *anel simples*, *anel de divisão*, *anel primo*. Quais são as "relações" entre esses conceitos?

2. Sejam dados os R-módulos A_1, A_2, B_1, B_2, onde R é anel com unidade. Assuma que $A_1 \times A_2 \simeq B_1 \times B_2$ é um módulo Artiniano e Noetheriano e $A_1 \simeq B_1$. Mostrar que $A_2 \simeq B_2$ como R-módulos.

3. Enunciar e demonstrar o *Teorema sobre a densidade*.

4. Definir o *grupo de Brauer* de um corpo. Em particular, definir como é feita a multiplicação e como a inversa no grupo de Brauer. Enunciar os teoremas que permitem usar essas definições.

5.Seja R um anel. Descrever de *duas maneiras* $\operatorname{Rad} R$ bem como $\operatorname{rad} R$.

6. Seja R um anel Artiniano à direita. O que pode ser dito sobre os radicais de R (duas afirmações).

Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 11/12/2013

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

1. Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo

a)(8pts) Se R é um anel noetheriano , $S = R[X]$ e para todo $r \in R$, $dim_{Krull}\frac{S}{rS} \leq 1$ então $dim_{Krull}(R) \leq 1$.

b(8pts) Existe $q \in \mathbb{Q}$ com $q \notin \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}[q]$ é $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.

c)(8pts) Sejam K um corpo e $R = K[X]$ o anel de polinômios sobre K. Se existe um R-módulo finitamente gerado M tal que o seu submódulo de torção $T(M)$ é finito e não nulo então K é um corpo finito.

d)(8pts) Se $(R, \mathbf{m})$ é um anel local, $k = \frac{R}{\mathbf{m}}$ e M é um R- módulo de comprimento finito igual a 1, ie, $l(M) = 1$, então $M \otimes_R k \simeq M$.

e)(8pts) Se num anel R um ideal não nulo admite uma decomposição primária minimal então ela é única.

---

2. Sejam R um anel, $\varphi : R^n \to R^n$ um R-homomorfismo e $A = [\varphi]_{\mathcal{C}}$ a matriz,$n \times n$, de φ na base canônica $\mathcal{C}$. Seja $*$ a seguinte afirmação:

$$(*) \qquad \varphi \text{ é injetora se e somente se é sobrejetora}$$

a)(7pts) Mostre que: i) φ é injetora se e somente se $det(A)$ é não divisor de zero (regular) em R. ii) φ é sobrejetora se e somente se $det(A) \in R^*$ (R^* é o conjunto dos elementos invertíveis de R). Conclua que φ é sobrejetora se e somente se é bijetora.

b)(8pts) Mostre que: Se R é noetheriano , $Spec(R) =$ o conjunto dos ideais primos de R é infinito e $n \in \mathbb{N}$ então existe R-homorfismo $\varphi : R^n \to R^n$ que é injetora mas não sobrejetora.

c)(8pts) Se R é noetheriano e $dim_{Krull}(R) \geq 2$ então em R existe um número infinito de ideais primos de altura 1.

d)(7pts) Se R é noetheriano e satisfaz a propriedade $(*)$ então R é semilocal (numero finito de ideais maximais) e $dim_{Krull}(R) \leq 1$. Mais ainda se R é Artiniano então R satisfaz $(*)$.

3.(10pts) Seja R um anel. **a)** Dado um ideal primo $\wp$ de R. Defina a altura de $\wp$ e enuncie o teorema generalizado de Krull para ideais.

b)(10pts) Seja $(R, \mathbf{m})$ um anel local noetheriano e suponha que $\mathbf{m} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Mostre que $dim_{Krull}(R) \leq n$ e mostre ainda que:

$$(**) \quad \text{se } dim_{Krull}(R) = n \text{ então: } \forall \quad a_1, \cdots, a_n \in R, \quad y = \textstyle\sum_i x_i a_i \in \mathbf{m}^2 \Longleftrightarrow a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{m}$$

c)(10pts) Aqui suponha que $R = K[X, Y]$ anel de polinômios em 2 variáveis sobre um corpo K e que $I = (X^2 - Y^2)$ é o ideal principal gerado por $f(X, Y) = X^2 - Y^2$. Chame $\overline{R} = \frac{R}{I} = K[x, y]$, onde $x = X + I$ e $y = Y + I$ e $\overline{\mathbf{m}} = (x, y)$ o ideal maximal de $\overline{R}$ gerado por x, y. Mostre que: $dim_{Krull}(\overline{R}) = 1$, a altura de $\overline{\mathbf{m}}$ é 1 e que $\overline{\mathbf{m}}\overline{R}_{\overline{\mathbf{m}}} = (x, y)\overline{R}_{\overline{\mathbf{m}}}$ satisfaz:
$\forall \ a, b \in \overline{R}_{\overline{\mathbf{m}}}, \ \ ax + by \in \overline{\mathbf{m}}^2\overline{R}_{\overline{\mathbf{m}}} \Longleftrightarrow a, b \in \overline{\mathbf{m}}\overline{R}_{\overline{\mathbf{m}}}$ (ie, a reciproca de $(**)$ não é verdadeira)
(Sugestão para a ultima parte de c) verifique que $\alpha \in \overline{R}$ se e somente se existem únicos $g(y), h(y) \in K[y]$ tal que $\alpha = xg(y) + h(y)$ e conclua que y é regular em $\overline{R}$)

Boa Prova

1	2	3	4	5	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Dezembro 2013 - **Grupos de Lie.**

NOME:____ **RA:**_______________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

Escolha 5 questões das abaixo

1) Seja G um grupo de Lie conexo então

$$Ker(Ad) = \mathrm{Cent(G)} = \{g \in G,\ gh = hg\ \forall h \in G\}$$

2) Seja H um subgrupo de Lie de G e denote por $\mathfrak{h}$ sua álegebra de Lie. Se $gHg^{-1} \subset H$ então $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

3) Seja G um grupo de Lie conexo e smiplesmente conexo e H um subgrupo discreto e normal. Então H isomorfo a $\pi_1(G/H)$.

4) Seja G um grupo de Lie nilpotente e conexo e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Então exp: $\mathfrak{g} \to G$ uma aplicação de recobrimento.

5) Seja G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $[G, G]$ o subgrupo gerado pelos elementos da forma $ghg^{-1}h^{-1}$ com g, $h \in G$. Mostrar que $[G, G]$ é um subgrupo de Lie normal, fechado com álgebra de Lie dada por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

6) Dado um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $\widetilde{G}$ sejam $G_1 = \widetilde{G}/\Gamma_1$ e $G_2 = \widetilde{G}/\Gamma_2$ com $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \widetilde{G}$ subgrupos discretos centrais de $\widetilde{G}$. Mostre que G_1 é isomorfo a G_2 se, e só se, existe um automorfismo diferenciável ϕ de $\widetilde{G}$ tal que $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

7) Seja G um grupo conexo, simplesmente conexo e compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que o grupo dos automorfismos Aut $(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ é compacto.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Dezembro 2013 - **Geometria Riemanniana.**

NOME:______________________________________ RA:____________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1) (2,0 pts.) Uma geodésica normal $\gamma : [0,\infty) \to M$ é dita um raio se $d(\gamma(0),\gamma(t)) = t$. Mostre que se M não é compacta então para cada $p \in M$ existe um raio começãndo em p. Determine os raios de $S^n \times \mathbb{R}$ com a métrica produto canônica. Existem raios em variedades compactas?

2) (2,0 pts.) Seja $V = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < r < \infty\ \ -\epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon\}$ e $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2).$$

Considere sobre $M = \phi(V)$ a métrica induzida por $\mathbb{R}^3$. Determine a equação da geodésica passando por $(1,0,1)$ com vetor tangente $(1,0,2)$.

3) (1,0 pts.) É possível munir ao Toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ com uma métrica de curvatura de Ricci positiva?. Justifique.

4) (1,0 pts.) Seja $p \in M$ e $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Seja $w \in T_v(T_pM)$ com $||w|| = 1$. Mostre que

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw) \qquad 0 \le t \le a$$

é um campo de Jacobi.

5) (2,0 pts.) Sejam M_1 e M_2 duas variedades Riemannianas completas de igual dimensão e $\gamma_i : [0,1] \to M_i$ $(i = 1,2)$ duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco. Assuma que $K_{M_1} < K_{M_2}$. Quais das seguintes afirmações é válida?

a) $\mathrm{Ind}(\gamma_1)$ e $\mathrm{Ind}(\gamma_2)$ não são comparáveis.
b) $\mathrm{Ind}(\gamma_1) \le \mathrm{Ind}(\gamma_2)$
c) $\mathrm{Ind}(\gamma_2) \le \mathrm{Ind}(\gamma_1)$

Justifique.

6) (2,0 pts.) Para quais valores de n temos que $S^3 \times \mathbb{R}P^n$ admite uma métrica com curvatura seccional positiva?. Justifique.

MM439 - 2S 2013 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________

Em todas as questões, $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero. Escolha questões cujo total de pontos possíveis não exceda 10,5 (existem 12 disponíveis). Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (1,0) Enuncie o teorema de Levi e encontre uma decomposição de Levi para $\mathfrak{gl}_n$.

2. (0,8) Seja $\mathfrak{h}$ a sub-álgebra de $\mathfrak{gl}_2$ das matrizes triangulares superiores. Calcule a matriz da forma de Killing de $\mathfrak{h}$ com relação a uma base de $\mathfrak{h}$.

3. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (0,8) Se $\mathfrak{g}$ for nilpotente, então $\mathfrak{g}$ possui ideal de codimensão 1.

   (b) (0,8) Os elementos de uma subálgebra nilpotente de uma álgebra de Lie semissimples são ad-nilpotentes.

   (c) (0,8) Se $\phi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ é um homorfismo de álgebras de Lie de dimensão finita e $\mathfrak{c}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{a}$, então $\phi(\mathfrak{c})$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{b}$.

   (d) (0,8) Se Δ é base de um siatema de raízes $R, \alpha \in \Delta$ e $\sigma \in \mathcal{W}$ são tais que $\ell(\sigma_\alpha \sigma) = \ell(\sigma) + 1$, então $\sigma^{-1}(\alpha) \in R^+$.

   (e) (0,8) Existe uma álgebra de Lie semissimples de dimensão 7.

   (f) (0,8) Se $\mathfrak{g}$ é semissimples e V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita tal que $V = U(\mathfrak{g})v$ para algum $v \in V$, então V é irredutível.

4. Suponha que $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ seja uma base de um siustema de raízes R e que as outras raízes positivas de R sejam $\alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 + 2\alpha_2$.

   (a) (0,8) Determine a matriz de Cartan de R.

   (b) (0,8) Encontre todas as outras bases de R.

5. Suponha que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$.

   (a) (0,8) Descreva duas subálgebras de Borel distintas contendo a mesma subálgebra de Cartan.

   (b) (1,0) Descreva duas subálgebras de Cartan distintas.

6. Para cada inteiro não negativo m, considere uma representação irredutível $V(m)$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ de dimensão $m + 1$. Sejam V e W representações de $\mathfrak{g}$.

   (a) (1,0) Demonstre a fórmula $V(m) \otimes V(n) \cong \bigoplus_{j=0}^{k} V(m + n - 2j)$, onde $k = \min\{m, n\}$.

   (b) (1,0) Mostre que existe um isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $V(m)^* \cong V(m)$.