Exame de Qualificação - MM427 - 14/12/2012

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$. Na prova $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ denotarão,respectivamente, o conjunto dos números inteiros e dos números racionais.

1) Faça cada uma das questões abaixo.

a)(1,0) Seja S um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado tal que $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{Q}$. Responda se é falsa ou verdadeira a seguinte proposição: Se $\mathbb{Z} \neq S$, então S **não é** subanel de $\mathbb{Q}$ (justifique sua resposta)

b)(1,0) Sejam $R = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre o corpo de números complexos $\mathbb{C}$, $I \subseteq R$ um ideal e $\vartheta(I) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n; f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall f \in I\}$. Mostre que:
$\sharp(\vartheta(I)) = m < \infty$ se e somente se $\frac{R}{I}$ é um anel Artiniano com exatamente m ideais maximais.

c)(1,0) Sejam A um anel e I ,J ideais de A satisfazendo $I + J = A$. Mostre que: $\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J} = \{0\}$.

d)(1,0) Dados um anel$R$ e M um R-módulo. Mostre que: Se $\varphi : M \longrightarrow R$ é um homorfismo sobrejetor de R-módulos então existe $x \in M$ tal que $M = Ker(\varphi) \oplus xR$.

---

2. (3pts)(Dimensão de Krull) Seja A um anel.

a) Defina a dimensão de Krul de um anel A.

b) Explique porque a dimensão de Krull de um anel local e noetheriano é sempre finita.

c) Dê um exemplo de um anel A com dimensão de Krull infinita.

d) Se $A = k[X, Y, Z]$ é anel de polinômios a 3 variáveis sobre o corpo k e $\wp$ é o ideal definido por $\wp = (X^2, YZ)$. Qual é a dimenão de Krull de $\frac{A}{\wp}$? Justifique sua resposta.

---

3 (3pts) Sejam R um anel e M um R-módulo. Mostre que:

a) Se N é submódulo de M e $\frac{M}{N} = \overline{m_1}R + ... + \overline{m_n}R$ então $M = m_1R + ... + m_nR + N$.

b) Se para todo $m \in M$ **não nulo** tem-se que todo submódulo de $\frac{M}{mR}$ é finitamente gerado então todo submódulo de M é finitamente gerado.

c) Sejam M_1, M_2 dois R- submódulos de M. Mostre que:
c_1) $\frac{M_1+M_2}{M_1} \simeq \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}$.

c_2) Se $M = M_1 + M_2$ então $\frac{M}{M_1 \cap M_2} \simeq \frac{M}{M_1} \times \frac{M}{M_2}$. Conclua que, neste caso, se $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ então M é noetheriano se e somente se $\frac{M}{M_1}$ e $\frac{M}{M_2}$ também são.

BOA PROVA

MM439 - 2S 2012 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________

Em todas as questões, $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero. Escolha questões cujo total de pontos possíveis não exceda 10 (existem 11,7 disponíveis). Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (0,6) Enuncie o teorema de Engel

2. (0,6) Seja $\mathfrak{h}$ a sub-álgebra de $\mathfrak{gl}_2$ das matrizes triangulares superiores. Calcule a matriz da forma de Killing de $\mathfrak{h}$ com relação a uma base de $\mathfrak{h}$.

3. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (0,6) O conjunto de todas as derivações internas de $\mathfrak{g}$ é um ideal da álgebra de todas as derivações de $\mathfrak{g}$.

   (b) (0,6) Toda representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie solúvel é completamente redutível.

   (c) (0,6) $\mathfrak{gl}_n$ possui uma única decomposição de Levi.

   (d) (0,6) Se $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é semi-simples.

   (e) (0,6) Se V e W são representações de dimensão finita de uma álgebra semi-simples, o caracter de $V \otimes W$ é o produto dos caracteres de V e W.

   (f) (0,6) Existe uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão 7.

   (g) (0,6) Sejam Δ uma base para um sistema de raízes R, R^+ o corespondente conjunto de raízes positivas e $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de R. Se $\alpha \in \Delta$ e $\sigma \in \mathcal{W}$ são tais que $\ell(\sigma_\alpha \sigma) = \ell(\sigma)+1$, então $\sigma^{-1}(\alpha) \in R^+$.

   (h) (0,6) Se $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ são subálgebras de $\mathfrak{g}$ satisfazendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ como espaços vetoriais, então a multiplicação estabelece um isomorpfismo de espaços vetoriais $U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \to U(\mathfrak{g})$.

4. (1,2) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel. Mostre que o conjunto das classes de isomorfismo das representações irredutíves de $\mathfrak{g}$ está em bijeção com com o conjunto dos funcionais lineares em $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$.

5. (1,2) Para $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ considere $T_\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ por $T_\alpha(x) = \alpha \circ \operatorname{ad}(x)$ e denote por I_α a imagem de T_α. Defina $\omega_\alpha : I_\alpha \times I_\alpha \to \mathbb{K}$ por $\omega_\alpha(\beta, \gamma) = \alpha([x, y])$ se $\beta = T_\alpha(x)$ e $\gamma = T_\alpha(y)$. Mostre que ω_α está bem definida e é uma forma biliniear anti-simétrica não degenerada em I_α. Conclua que $\dim I_\alpha$ é par.

6. (1,5) Reconstrua o sistema de raízes de tipo G_2 a partir de sua matriz de Cartan e determine o comprimento do elemento mais longo de seu grupo de Weyl.

7. Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ e V uma representação de $\mathfrak{g}$. Para cada $n \geq 0$, denote por $V(n)$ uma representação irredutível de dimensão $n+1$.

   (a) (1,2) Sejam $V^1, V^2, \ldots, V^l$ subrepresentações irredutíveis de V tais que $V = \bigoplus_{j=1}^{l} V^j$ e considere $[V : V(n)] := \#\{j : V^j \text{ é isomorfo a } V(n)\}$. Mostre que $[V : V(n)]$ não depende da escolha das subrepresentações V^j.

   (b) (0,6) Dê um exemplo onde existe mais de uma escolha de decomposição de V como soma direta de subrepresentações irredutíveis.

Exame de Qualificação ao Doutorado
MM 444, Álgebra não Comutativa
14 de dezembro de 2012

1. a) (0,5 pt) Definir o *Radical de Baer* $\beta(R)$ de um anel R. Definir elemento *fortemente nilpotente* de um anel.

b) (2 pt) Demonstrar que $\beta(R)$ coincide com o conjunto dos elementos fortemente nilpotentes de um anel R.

2. a) (1 pt) Definir o **grupo de Brauer** $B(F)$ de um corpo F. (Justificar que é um grupo!)

b) (1,5 pt) Mostrar que o grupo de Brauer $B(\mathbb{Q})$ dos racionais contém uma infinidade de elementos de ordem 2.

3. a) (1 pt) Mostrar que o produto tensorial de duas álgebras centrais simples sobre o corpo F é de novo uma álgebra central e simples sobre F. (Aqui as álgebras são de dimensão finita sobre F.)

b) (1,5 pt) Seja A central simples sobre F, $\dim_F A < \infty$ e seja δ uma derivação de A (isto é δ é linear e $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ para quaisquer a, $b \in A$). Mostrar que existe $c \in A$ tal que $\delta(x) = xc - cx$ para todo $x \in A$.

4. (2,5 pt) Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das perguntas abaixo. Justificar as respostas! (Resposta sem a devida justificativa não será considerada.)

a) Se R é um anel artiniano à esquerda então o radical de Jacobson de R é nilpotente.

b) O grupo de Brauer de um corpo F pode conter subgrupos cíclicos infinitos.

c) Se o anel R é artiniano à direita e $1 \in R$, então R é noetheriano à direita.

d) Se R é um anel semi-primo então todo ideal minimal (à direita) I de R tem a forma $I = eR$ onde $e = e^2$ é idempotente.

e) A álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial sobre o corpo F é simples.

5. (1 pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita sobre o corpo F, com base $e_1, e_2, \ldots$; definimos as transformações lineares x e y em V como segue:

$$x\colon e_k \mapsto \sqrt{k}e_{k+1}, \qquad y\colon e_1 \mapsto 0, \qquad y\colon e_{k+1} \mapsto \sqrt{k}e_k$$

para todo $k \geq 1$.

a) Mostrar que a subálgebra A gerada por x e y dentro da álgebra das transformações lineares de V contém a identidade.

b) A subálgebra A é primitiva?

Boa Prova!

Exame de Qualificação do Doutorado

Análise Funcional

12/12/2011

RA........................ Nome....................................

Ao resolver cada questão, enuncie os resultados utilizados.

1. Dado $x \in [a,b]$, prove que o conjunto

$$A_x = \{f \in C[a,b] : f(x) > 0\}$$

é aberto em $C[a,b]$.

2. Seja E um espaço normado, e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\phi(x_j)| < \infty \quad \text{para todo } \phi \in E'.$$

Prove que

$$\sup_{\|\phi\| \le 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\phi(x_j)| < \infty.$$

3. Seja $T : \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$ definido por

$$T((\alpha_j)_{j=1}^{\infty})((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) = (\alpha_j \xi_j)_{j=1}^{\infty}$$

para todo $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ e $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$.

(a) (0,5) Prove que $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty; \mathcal{L}(\ell_2; \ell_2))$.

(b) (1,0) Prove que $\|T((\alpha_j)_{j=1}^{\infty})\| = \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|$.

(c) (0,5) Prove que o espaço $\mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$ não é separável.

4. Seja H um espaço de Hilbert, com produto interno $(.|.)$. Seja $T : H \to H$ uma aplicação linear tal que

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \text{para todo } x, y \in H.$$

Prove que T é contínua.

5. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ índices conjugados, ou seja $(1/p)+(1/q) = 1$. Dada $h \in L_\infty[0,1]$, seja $T_h : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ definido por

$$T_h(f) = fh \quad \text{para toda } f \in L_p[0,1].$$

(a) (0,5) Prove que $T_h \in \mathcal{L}(L_p[0,1]; L_p[0,1])$.

(b) (1,5) Se $T_h' \in \mathcal{L}(L_q[0,1]; L_q[0,1])$ é o operador dual ou adjunto, prove que

$$T_h'(g) = gh \quad \text{para toda } g \in L_q[0,1].$$

EQD - MM 448 - Grupos de Lie - 10/12/2012

RA/Nome: ______________________________

Atenção: Esta prova contém 7 questões. Escolha **quatro** questões da primeira página, e **uma** questão da segunda página.

1. Mostre que $SU(n)$ é simplesmente conexo.

2. Seja G o grupo de Heisenberg, isto é, o grupo de Lie das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(a) Calcule $Z(G)$.
(b) Escreva a expressão da medida de Haar de G nas coordenadas (x, y, z) e nas coordenadas dadas pela aplicação exponencial.

3. Seja $P = G \times_\rho H$ um produto semi-direto em que G e H são grupos de Lie conexos e $\rho : G \to \mathrm{Aut}\,(H)$ um homomorfismo diferenciável. Suponha que H seja unimodular. Mostre que se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é simples então P também é unimodular.

4. **(a)** Enuncie o Teorema de Cartan.
(b) Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e considere $H < GL(2, \mathbb{C})$ o subgrupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

O subgrupo H é um grupo de Lie?

5. **(a)** Descreva os grupos de Lie conexos abelianos. Quais deles são compactos?
(b) Mostre que a variedade diferenciável $\mathbb{R}^2$ admite exatamente duas estruturas de grupo de Lie.

6. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa, justificando a resposta, no caso verdadeiro ou apresentando um contra-exemplo no caso falso.

(a) Se G é um grupo de Lie conexo então G é unimodular se, e só se, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,(A)) = 0$ para todo A na álgebra de Lie de G.

(b) Se G é um grupo de Lie conexo unimodular então todo grupo de Lie conexo H, localmente isomorfo a G, também é unimodular.

(c) Seja $\mathfrak{z}\,(\mathfrak{g})$ o centro da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G. Se $\mathfrak{z}\,(\mathfrak{g}) = \{0\}$, então o centro de G se reduz a $\{1\}$.

(d) Seja G um grupo de Lie conexo unimodular. Então, todo subgrupo de Lie $H \subset G$ também é unimodular.

7. Dê, se possível, exemplos das situações abaixo. Justifique, caso não exista exemplo.

(a) Um grupo de Lie G cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel e tal que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ não é difeomorfismo local.

(b) Um grupo de Lie G não compacto e um espaço homogêneo G/H, que admite uma métrica Riemanniana G-invariante.

(c) Um grupo de Lie G que admite uma métrica Riemanniana bi-invariante e um subgrupo fechado $H \subset G$ tal que em G/H não tem métrica Riemanniana G-invariante.

(d) Grupos de Lie G e H conexos que não são isomorfos e tais que suas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas e seus grupos fundamentais $\pi_1\,(G)$ e $\pi_1\,(H)$ também são isomorfos.

EQD - MM 447 - Introdução à Topologia Algébrica - 10/12/2012

RA/Nome: ______________________________

Escolha 5 questões entre as abaixo.

1. Construa explicitamente um retrato por deformação do toro sem um ponto na união dos seus círculos longitudinal e meridional.

2. Calcule a homologia de CX (cone) e SX (suspensão) em termos da homologia de X.

3. Mostre que dado $k \geq 1$, existe $N \geq 1$ tal que se $n > N$ então $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n+1))$.

4. Seja $X = (S^2 \times \mathbb{R}P^3) \# \mathbb{R}P^5$. Calcule a homologia e a cohomologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Q}$. Calcule ainda a estrutura do anel de cohomologia.

5. Mostre que $H_i(X \times S^n) \cong H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$ para todo i, n (defina $H_i = 0$ se $i < 0$).
Dica: Mostre que
$H_i(X \times S^n) \cong H_i(X) \oplus H_i(X \times S^n, X \times \{x_0\})$ e
$H_i(X \times S^n, X \times \{x_0\}) \cong H_{i-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{x_0\})$.

6. Mostre que a inclusão $i : A \to X$ de um subcomplexo em um complexo CW finito é uma cofibração.