Álgebras de Lie
Exame de qualificação

Nome: ______________________________
RA : ___________

Exercícios:

1. Seja D uma matriz diagonal sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ e $\overline{D}$ a matriz cujas entradas são respectivamente os conjugados das entradas de D. Mostre que $ad_{\overline{D}} : gl(\mathbb{C}, n) \to gl(\mathbb{C}, n)$ pode ser escrita como expressão polinomial em ad_D.

2. Seja L álgebra de Lie e I ideal de L semissimples como álgebra de Lie. Prove que existe J ideal de L tal que $L = I \oplus J$.

3. Encontre toda subálgebra de Cartan de $sl(\mathbb{C}, 2)$.

4. Mostre que para todo sistema de raízes, o grupo de Weyl associado é finito.

5. Seja S o reticulado gerado pelos vetores da base canônica e pelo vetor $\frac{e_1+\cdots+e_8}{2}$ de $\mathbb{R}^8$. Seja S_0 o subreticulado de S cuja soma das coordenadas dos elementos é par. Seja $R = \{v \in S_0 | (v, v) = 2\}$. Prove que R é sistema de raízes e desenhe o seu diagrama. Aqui o símbolo $(\ , \ )$ índica o produto interno de $\mathbb{R}^8$.

Teoria

1. Enuncie e prove o Teorema de Serre.

2. Construa o diagrama de Dynkin de G_2.

Exame de Qualificação - Topologia Algébrica - 29-07-2015

RA/Nome:

Escolha 5 questões.

1. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa, justificando a resposta.
   (a) $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ é homeomorfo a $\mathbb{CP}^{n+m}$.
   (b) Se os conjuntos abertos e conexos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ são homeomorfos, então $m = n$.
2. Seja $X = D^2 \times S^1$ (toro sólido), cujo bordo é $\partial X = T^2$. Calcule os grupos de homologia do espaço quociente $X/\partial X$ (obtido colapsando a fronteira num ponto).
3. Dê exemplo de dois espaços topológicos X, Y tais que $\pi_k(X) = \pi_k(Y)$ para todo k, mas X não é homeomorfo a Y.
4. Seja $X = S^n \bigcup_\varphi e^{n+1}$, com aplicação de colagem

   $$\varphi : S^n = \partial e^{n+1} \to S^n = X^n,$$

   onde X^n denota o n-ésimo esqueleto de X, tal que o grau de φ é m. Calcule os grupos homologia de X.
5. Calcule $\pi_2 U(14)$.
6. Suponha X um CW-complexo de dimensão finita. Denote por X^n o n-ésimo esqueleto de X. Prove que
   (a) $H_k(X^n, X^{n-1})$ é zero se $k \neq n$ e é um grupo abeliano livre se $k = n$, com uma base em correspondência um-a-um com o número de n-celulas de X.
   (b) $H_k(X) = 0$, se $k > \dim X$.

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise Funcional
31 de Julho de 2015

Nome: ____ **RA:** ________________

Questão 1. (1.5) Sejam X e Y espaços de Banach. Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares limitados de X para Y tal que $T_n x \to Tx$, em Y, para cada $x \in X$. Prove que T é um operador linear limitado.

Questão 2. (1.5) Sejam X um espaço de Banach e $K \subset X$ um subconjunto compacto na topologia forte. Seja (x_n) uma sequência em K tal que $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca. Prove que $x_n \to x$ na topologia forte.

Questão 3. (2.0) Sejam $X \neq \varnothing$ espaço normado e X^* seu dual.

(a) Mostre que dado $x \in X \backslash \{0\}$ existe $\phi \in X^*$ tal que $\phi(x) = \|x\|$ e $\|\phi\| = 1$.

(b) Seja X um espaço de Banach reflexivo. Mostre que se $\phi \in X^* \backslash \{0\}$, então existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $\phi(x) = \|\phi\|$.

Questão 4. (1.5) Sejam H um espaço de Hilbert e $E \subset H$ um subconjunto não vazio. Defina $E^\perp = \{x \in H; \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in E\}$.

(a) Mostre que $E^\perp$ é um subespaço fechado de H.

(b) Mostre que $\overline{E} \subset (E^\perp)^\perp$.

Questão 5. Sejam X um espaço de Banach e $T\colon D(T) \subset X \to X$ um operador fechado com domínio $D(T)$.

(a) **(1.0)** Mostre que $D(T)$ com a norma

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\|_X + \|Tx\|_X$$

é um espaço de Banach.

(b) **(0.5)** Mostre que se $0 \in \rho(T)$ (T limitado) então as normas $\|\cdot\|_{D(T)}$ e $\|\cdot\|_X$ em $D(T)$ são equivalentes.

Questão 6. (2.0) Seja $T : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, definido por

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...).$$

(a) Calcule $\|T\|$ e mostre que T é compacto.

(b) Encontre o espectro de T.

Exame de Qualificação – MM448 – Grupos de Lie

Departamento de Matemática - IMECC, 29 de Julho de 2015.

NOME:

Escolha 5 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Sejam G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal de codimensão 1. Mostre que o subgrupo conexo $\langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ é fechado. Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de G ser simplesmente conexo não pode ser retirada.

2. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado um subgrupo $H \subset G$ considere o conjunto $\mathfrak{h}_H \subset \mathfrak{g}$ formado pelas derivadas $\alpha'(0)$ das curvas diferenciáveis $\alpha(t) \in H$ com $\alpha(0) = 1$. Mostre que $\mathfrak{h}_H$ é uma subálgebra de Lie. Suponha que H é um subgrupo normal e que $\mathfrak{h}_H = \{0\}$ e mostre que $H \subset Z(G)$.

3. Denote por $\mathfrak{s}$ o espaço vetorial das matrizes simétricas $n \times n$. Mostre que a restrição a $\mathfrak{s}$ da aplicação exponencial é uma imersão injetora, cuja imagem é o conjunto S das matrizes simétricas positivas definidas.

4. Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e H um subgrupo de Lie com subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Suponha que para um elemento $g \in G$ vale
$$\mathfrak{g} = \sum_{k \geq 1} \mathrm{Ad}(g)^k \mathfrak{h}.$$
Mostre que existe um inteiro $k \geq 1$ tal que o produto $(gH)^k = gH \cdots gH$ (k vezes) tem interior não vazio em G. Use isso para concluir que todo elemento de G é produto de elementos de gH ou de Hg^{-1}.

5. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa, justificando a resposta.
   (a) Se G e H são grupos de Lie conexos localmente isomorfos (isto é, suas álgebras de Lie são isomorfas) e seus grupos fundamentais $\pi_1(G)$ e $\pi_1(H)$ são isomorfos então G e H são isomorfos.
   (b) Seja G um grupo de Lie conexo e denote por $\widetilde{G}$ seu recobrimento universal. Se $\widetilde{G}$ é compacto então o grupo fundamental de G é finito.
   (c) Se G é um grupo de Lie conexo unimodular então todo grupo de Lie conexo H, localmente isomorfo a G, também é unimodular.
   (d) Se G é um grupo de Lie conexo, compacto e não abeliano então a aplicação exponencial não é um difeomorfismo local.

6. Dê, se possível, exemplos das situações abaixo. Justifique, caso não exista exemplo.
   (a) Dê exemplo de um grupo de Lie conexo G tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ mas que $Z(G)$ é infinito.
   (b) Um grupo de Lie unimodular G e um subgrupo de Lie $H \subset G$, que não é unimodular.
   (c) Um grupo de Lie G cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel e tal que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ não é difeomorfismo local.
   (d) Grupos de Lie G e H conexos que não são isomorfos e tais que suas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas e seus grupos fundamentais $\pi_1(G)$ e $\pi_1(H)$ também são isomorfos.

MM 427 Commutative Algebra – Qualification Exam - 1st Semester of 2015 – August 3, 2015

STUDENT NAME / RA: ______________________________

Directions:

- Every ring A is assumed to be commutative and non-zero (that is $1_A \neq 0_A$).
- Please motivate your work.
- The total score of this test is 100. To pass it, you need to score 50 or better.

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	10	
4	8	
5	10	
6	6	
7	8	
8	10	
9	10	
10	8	
11	10	
Total:	100	

1. (10 pts) Let A be a ring and I an ideal contained in the Jacobson radical $J(A)$. Let M be an A-module, N be a finitely generated A-submodule of M and let $\varphi : M \to N$ be a homomorphism. If the induced homomorphism $\overline{\varphi} : M/IM \to N/IN$ is surjective, then φ is surjective.

2. (10 pts) Let A be a ring and M be an A-module and let N_1, N_2 be submodules of M. If the quotient modules M/N_1 and M/N_2 are Noetherian, so is $M/(N_1 \cap N_2)$.

3. (10 pts) Find the radical of the ideal $I = \langle YT^3, XYZT, X^5Z^6 \rangle$ and an irredundant primary decomposition of $\mathrm{Rad}(I)$. Use it to find the minimal associated primes of I in the ring $K[X, Y, Z, T]$.

4. (8 pts) Let A and B be two rings and $f : A \to B$ be a ring homomorphism. Show that, if M is a free A-module of rank k, then $M \otimes_A B$ is a free B-module of rank k.

5. (10 pts) Let A be a subring of a ring B, such that the set $B \setminus A$ is closed under multiplication. Show that A is integrally closed in B.

6. (6 pts) State one of the versions of Noether normalization for a finitely generated K-algebra A over a field.

7. (8 pts) Prove or disprove: there is a Noetherian local integral domain D containing a proper ideal I generated by 2 elements with $\mathrm{ht}(I) = 3$.

8. (10 pts) Let $A = \mathbb{R}[X, Y, Z]$ be the ring of polynomials over the real numbers and $\mathfrak{p}$ be the ideal defined by $\langle X - 3, Y - \frac{3}{7} \rangle$. What is the Krull dimension of the localization $A_{\mathfrak{p}}$? Explain your answer.

9. (10 pts) What is the Krull dimension of the ring $A := \mathbb{Q}[\pi, \sqrt{11}, X, Y]/I$ where $I = \langle X^2 - Y^3 + XY + 3 \rangle$?

10. (8 pts) Let L, K be fields such that L/K is a field extension. Let A be a K-algebra.

    1. Define a transcendence basis for L/K.
    2. Define the transcendence degree of L/K when the L is finitely generated over K.
    3. Define the transcendence degree of a finitely generated K-algebra A that is an integral domain.
    4. What is the transcendence degree of a finitely generated K-algebra A that is an integral domain equal to?

11. (10 pts) Let A be an integral domain. Prove that, if A is a unique factorization domain (UFD), then every prime ideal $\mathfrak{p}$ with $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ is principal.

Exame de Qualificação – MM423 Geometria Riemanniana

Departamento de Matemática - IMECC 29 de Julho de 2015.

NOME:

Escolha 6 dentre as 7 questões abaixo. Boa prova!

1. Sejam (x, U_x) e (y, U_y) dois sistemas de coordenadas locais em uma variedade riemanniana d-dimensional M com os respectivos coeficientes da métrica g^x e g^y. Mostre que na intersecção dos domínios temos:

$$g^y_{l,k} = \sum_{i,j=1}^{d} g^x_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}.$$

2. Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica e X um campo de Killing em M. Mostre que a restrição $X(\gamma(s))$ de X em $\gamma(s)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ. Use esse fato para mostrar que se M é conexa e existe $p \in M$ com $X(p) = 0$ e derivada covariante $\nabla X(p) = 0$ então $X \equiv 0$ em M.

3. Sejam M_1 e M_2 variedades riemannianas com as respectivas conexões de Levi- -Civita ∇^1 e ∇^2. Considere o espaço produto $M_1 \times M_2$. Usando que a conexão de Levi-Civita no produto $\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla^1_{Y_1} X_1 + \nabla^2_{Y_2} X_2$ para $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M_1)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M_2)$, mostre que

   a) Se $\sigma(x, y) \in T_{(p,q)(M_1 \times M_2)}$ é um plano tal que $x \in T_p M_1$ e $y \in T_q M_2$ então sua curvatura sectional $K(\sigma) = 0$.

   b) Se $x : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ é dada por

$$x(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi), \qquad (\theta, \varphi) \in \mathbf{R}^2,$$

   então $x(\theta, \varphi)$ é uma imersão de $\mathbf{R}^2$ na esfera unitária $S^3(1) \subset \mathbf{R}^4$, cuja imagem $x(\mathbf{R}^2)$ é um toro T^2 com curvatura seccional zero na métrica induzida.

4. Considere o modelo de espaço hiperbólico $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n > 0\}$, com $g_{ij} = \delta_{ij}/(x_n)^2$. Use o teorema de Liouville para mostrar que $\xi : H^n \to H^n$ é uma isometria se e somente se ξ é a restrição de uma transformação conforme em $\mathbf{R}^n$ que deixa invariante o conjunto $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n > 0\}$.

5. Mostre que uma variedade riemanniana M com conexão de Levi-Civita ∇ tem curvatura seccional constante K_0 se e somente se seu tensor curvatura satisfaz

$$< R(X, Y, W), Z >= K_0 \big[< X, W >< Y, Z > - < Y, W >< X, Z > \big].$$

6. Considere uma geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ com $\gamma(t_0)$, $t_0 < a$, o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ, com multiplicidade d. Mostre como construir d campos de vetores l.i $X_1, \ldots, X_d$ ao longo de γ em $[0, t_0 + \varepsilon]$ de tal maneira que $I_{t_0+\varepsilon}(X_i, X_i) < 0$. Conclua que existe t tal que $\gamma(t)$ está no cut locus de $\gamma(0)$ para algum $t \le t_0$.

7. Enuncie o teorema de Rauch e use-o para mostrar que se as curvaturas seccionais K de uma variedade riemanniana M satisfaz as desigualdades:

$$0 < L \le K \le H$$

   com L, H constantes, então dada uma geodésica γ em M, a distância d ao longo de γ entre dois pontos conjugados consecutivos de γ satisfaz

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \le d \le \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$