Exame de Qualificação **Grupos de Lie** 04 Julho 2014

Nome:

1. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tome elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$ que geram $\mathfrak{g}$ (isto é, X e Y não estão contidos em nenhuma subálgebra própria de $\mathfrak{g}$ ou, o que é equivalente, os colchetes sucessivos entre X e Y geram $\mathfrak{g}$). Mostre que os grupos a 1-parâmetro $\exp tX$ e $\exp tY$ geram G.

2. Sejam G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal de codimensão 1. Mostre que $\langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ é fechado.

3. Seja G um grupo compacto não abeliano. Mostre que a aplicação exponencial em G não é difeomorfismo local.

4. Sejam G um grupo de Lie conexo e H um subgrupo fechado. Seja também K um subgrupo compacto e suponha que $\dim K - \dim (K \cap H) = \dim G/H$. Mostre que K age transitivamente em G/H.

5. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa, justificando a resposta.

   (a) Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que se a álgebra derivada $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ coincide com $\mathfrak{g}$ então G é unimodular.

   (b) Seja K um grupo de Lie compacto e conexo. Então, o grupo afim $\mathrm{Af}\,(K)$ também é compacto.

   (c) Se G e H grupos de Lie conexos localmente isomorfos (isto é, suas álgebras de Lie são isomorfas) e seus grupos fundamentais $\pi_1(G)$ e $\pi_1(H)$ são isomorfos então G e H são isomorfos.

   (d) Seja G um grupo de Lie conexo e denote por $\widetilde{G}$ seu recobrimento universal. Se $\widetilde{G}$ é compacto então o grupo fundamental de G é finito.

Exame de Qualificação
Análise Funcional

7 de Julho de 2014

Nome:____

RA:__ ____

Assinatura:____

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

(1) (**1.5 pontos**) Seja $C^1[0,1]$ espaço de funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuadamente diferenciáveis. Seja $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, para toda $f \in C^1[0,1]$. Mostre que $\|\cdot\|$ define uma norma em $C^1[0,1]$ e $(C^1[0,1]; \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. Mostre também que $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ não é de Banach.

(2) (**2 pontos**) Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço de Banach. Sejam M_1 e M_2 dois subespaços fechados de X tal que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Mostre que $M_1 + M_2$ é fechado se e somente se existe uma constante $\alpha \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq \alpha\|x+y\|, \qquad \forall\, x \in M_1 \text{ e } \forall\, y \in M_2.$$

(3) (**2 pontos**) Seja X espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ de dimensão infinita. Prove que a esfera unitária $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é nunca fechada na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$. Qual é o fecho de S nesta topologia?

(4) (**2 pontos**) Seja $H := L^2([0, \frac{1}{2}]; \mathbb{C})$ espaço de Hilbert de funções definidas em $[0, \frac{1}{2}]$ com valores em $\mathbb{C}$. Para todo $K(x) \in C([0, \frac{1}{2}]; \mathbb{C})$ defina um operador $T_K : H \to H$ por

$$(T_K f)(x) = K(x) f(x), \qquad f \in H.$$

(a) Mostre que $T_K \in \mathcal{B}(H)$.
(b) Encontre o adjunto T_K^* de T_K.
(c) Mostre que para $K(x) = 1 + x$, T_K é inversível.
(d) Para $K(x) = x$, encontre $\sigma_P(T_K)$ e $\sigma(T_K)$.

(5) (a) (**1 ponto**) Seja H espaço de Hilbert complexo. Sejam $A_1, A_1 \in \mathcal{B}(H)$ operadores positivos. Mostre que $A_1 A_2$ é positivo se e somente se A_1 e A_2 comutam.

(b) (**1.5 pontos**) Seja H espaço de Hilbert separável. Dado uma sequencia $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \to 0$, prove que existe um operador compacto T tal que $\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}$. Sob qual condição este operador fica auto-adjunto?

Exame Qualificação Julho 2014 - **Topologia Algébrica**.

ATENÇÃO: Não é permitido destacar as folhas

NOME:____ **RA:**________________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1) Seja (X, E) um complexo CW e denote por α_i ao número de $i-$ células em E. Mostrar que a característica de Euler é dada por

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i$$

onde $\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{posto}(H_i(X))$.

2) Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento e $n \geq 2$. Provar que $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_n(X, x_0)$ é um isomorfismo.

3) Sejam X, Y complexos CW finitos, conexos, de dimensão n e com exatamente uma n-célula.

- i- Mostre que $H_n(X)$ é zero ou isomorfo a $\mathbb{Z}$,
- ii- Mostre que se $H_n(X) \simeq \mathbb{Z}$ então $H_{n-1}(X) \simeq H_{n-1}(X^{n-1})$ onde X^{n-1} é o $n-1$ esqueleto de X.
- iii- Mostre que se $H_n(X) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_n(Y)$ então

$$H_k(X \sharp Y) = \begin{cases} H_k(X) \oplus H_k(Y) & \text{se} \quad 0 < k < n \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad k = 0,\ n \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

4) Calcular $H_p(\mathbf{C}P^n)$ para $p = 1, ..., 2n$.

5) Provar verdadeiro ou falso

- a- $\mathbb{C}P^2$ não é homotopicamente equivalente a $S^2 \vee S^4$.
- b- O funtor $H_1(\cdot, \mathbb{Z})$ classifica as variedades fechadas de dimensão 2.
- c- Seja $G_{2;4}$ a variedade de Grassmann de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^4$. Então $\pi_1(G_{2;4}) = 0$ e $\pi_3(G_{2;4}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- d- $\pi_{13}(SO(15)) = 0$.