EQM - MM 453 - Topologia Geral - 13/07/2012

RA/Nome: ____

Faça somente 5 das 7 questões abaixo.

1. Seja $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto finito com $n \geq 2$ elementos.
(a) Mostre que podem ser definidas pelo menos $n+1$ topologias não-homeomorfas em X.
(b) Para $n = 2$, descreva todas as topologias não-homeomorfas que podem ser definidas em X.
Curiosidade: Para $n = 5$, existem exatamente 6942 topologias não-homeomorfas em X.

2. Para $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, considere $N_{a,b} = \{a + nb; n \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Mostre que a família $\{N_{a,b}\}$ é base de uma topologia τ em $\mathbb{Z}$.
(b) Mostre que, em τ, cada conjunto $N_{a,b}$ é fechado.
(c) Mostre que τ é Hausdorff.

3. Seja X um espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in D$, onde $D \subset X$ é um conjunto denso. Mostre que $f(x) = 0$, para todo $x \in X$.

4. Seja X um espaço topológico normal, e A, B dois fechados disjuntos de X. Prove que existem abertos U, V de X tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

5. Mostre:
(a) Um subespaço fechado de um espaço topológico compacto é compacto.
(b) Um subespaço compacto de um espaço topológico de Hausdorff é fechado.

6. Seja $O(n)$, $n \geq 2$, o conjunto das matrizes A, de dimensão $n \times n$, tais que $AA^t = A^t A = Id$. Considere $O(n)$ como subespaço topológico de $\mathbb{R}^{n^2}$. Mostre que $O(n)$ é compacto e desconexo.

7. Seja $f : [0, 1] \to S^n$ $(n \geq 2)$ um laço em x_0. Assuma que f é homotópico a um laço $g : [0, 1] \to S^n$ em x_0 que não é sobrejetor, e prove que $\pi_1(S^n) = \{0\}$, para $n \geq 2$.

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 16 de Julho de 2012.

1. Questão. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M$, para todo $x \in U$ e $i = 1, ..., n$, então $f(\Omega)$ é limitado quando $\Omega \subset U$ é limitado e convexo.

2. Questão. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $x_0 \in (a, b)$ um ponto crítico de f. Mostre que se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então x_0 é ponto de máximo global. Este é o único ponto em (a, b) onde $f(x)$ assume seu máximo global?

3. Questão. Demonstre o teorema da aplicação inversa, usando o teorema do posto.

4. Questão. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e limitado tal que $S = \partial\Omega$ é uma superfície de classe C^∞.

(a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação de classe C^1. Usando o Teorema de Stokes (em sua forma mais geral), mostre que

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n)dS \quad \text{(Teorema da Divergência).}$$

(b) Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Mostre que

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

onde $\Delta u = \Sigma_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada de u na direção do vetor normal a $\partial\Omega$.

5. Questão. Sejam ω_1 e ω_2 1-formas de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Se $\omega_2(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, então $\omega_1 = f\omega_2$, onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.