Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 15/07/2011

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

1. Responda cada uma das questões abaixo justificando suas respostas com detalhes.

a) (10pts) Seja A um anel Artiniano. Pergunta-se: $A[X]$ é um anel Artiniano? $A[X]$ é um anel Noetheriano?

b) (8pts) Seja $A \subseteq B$ uma extensão de anéis na qual cada elemento $b \in B$ é algébrico sobre A i.e. existe $f \in A[X] \setminus \{0\}$ tal que $f(b) = 0$. A afirmação de que $dim(A) \leq dim(B)$ é falsa ou verdadeira?

c)(10pts) Sejam D um domínio e M um D-módulo finitamente gerado. Responda falso ou verdadeiro para a seguinte afirmação: Se M é livre de torção então M é módulo livre.

d)(12pts) Sejam $\mathbb{B} = K[X_1, \cdots, X_n]$ o anel de polinômios em n ($n > 1$) variáveis sobre o corpo K e $\wp \subset \mathbb{B}$ um ideal primo não nulo. Pergunta-se: é verdade ou é falso que

$$\wp \text{ é ideal principal se e somente se existe } i,\ 1 \leq i \leq n \text{ tal que } \{0\} = \wp \cap K[X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n]$$

---

2. Seja $B|A$ uma extensão de anéis.

a) (8pts) Defina o que quer dizer $B|A$ ser extensão integral. Enuncie os teoremas de "Going-up"e "Going-down".

b) (10pts) Se $B|A$ é extensão integral demonstre que $dim_{Krull}(A) = dim_{Krull}(B)$. Exiba exemplos em que $\infty > dim_{Krull}(A) > dim_{Krull}(B)$ e $dim_{Krull}(A) < dim_{Krull}(B) < \infty$, onde $B|A$ é extensão de anéis (**não** integral) e A e B **não** são corpos.

c) (12 pts) Calcule a dimensão de Krull dos seguintes anéis :

$$\mathbb{Q}[X, Y, Z]/(X^5 + X + 1, Y^3 + Z^3), \qquad \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{7}] \qquad \text{e} \qquad \mathbb{Q}[i].$$

---

3. Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado.

a) (10 pts) Suponha que $(R, \mathbf{m})$ é anel noetheriano local. Sejam $F = R/\mathbf{m}$ o corpo de resíduos de R e V o F-espaço vetorial $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ (ie, $V = \mathbf{m}/\mathbf{m}^2$). Explique em detalhes (ie, enunciando todos os resultados fundamentais utilizados) porque que $dim_{Krull}(R) \leq dim_F(V)$.

b) (10 pts) Dado $I \subset R$ ideal, mostre que $M \otimes_R (R/I) \simeq M/IM$. Conclua que se $I \subset J(R)$ =radical de Jacobson então:

$$M \otimes_R (R/I) = \{0\} \iff M = \{0\}.$$

Mais ainda exiba um exemplo de um anel R com dois R-módulos não nulos M_1, M_2 tal que $M_1 \otimes_R M_2 = \{0\}$.

c) (10 pts) Mostre que: Se $(R, \mathbf{m})$ é local noetheriano e M é R-módulo de comprimento finito e não nulo então existe $1 \leq k$ tal que $\mathbf{m}^k \subseteq ann(M)$, onde $ann(M) = \{r \in R; rM = \{0\}\}$. Conclua disso que $R/ann(M)$ é anel artiniano. Mais geralmente como consequência da primeira parte e supondo ainda que M tem comprimento finito mostre que se R é noetheriano, então $R/ann(M)$ é anel artiniano.

Boa Prova

MM439 - 1S 2011 - Exame de Qualificação

Nome: ______________________________ RA: __________ 15/07/2011

Em todas as questões, $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero. Escolha questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (a) (08pts) Defina a forma de Killing-Cartan e, no caso de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, cálcule sua matriz com relação a alguma base de $\mathfrak{g}$.
   (b) (06pts) Defina álgebra semi-simples e dê uma caracterização das álgebras semi-simples em termos da forma de Killing-Cartan.

2. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (06pts) Todo ideal abeliano de $\mathfrak{g}$ está contido no centro.
   (b) (06pts) Se $\mathfrak{h}$ é ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.
   (c) (06pts) Toda álgebra redutiva tem uma única decomposição de Levi.
   (d) (06pts) Os elementos de uma subálgebra nilpotente de uma álgebra semi-simples são nilpotentes.
   (e) (06pts) Se V é uma representação de dimensão finita tal que $V = U(\mathfrak{g})v$ para algum $v \in V$, então V é irredutível.
   (f) (06pts) A álgebra de Lie de tipo E_7 possui pelo menos duas subálgebras isomorfas a $\mathfrak{so}(10)$.
   (g) (06pts) Se V e W são representações de dimensão finita de uma álgebra semi-simples, o caracter de $V \otimes W$ é o produto dos caracteres de V e W.

3. Considere o sistema de raízes de tipo B_3.
   (a) (10pts) Reconstrua o sistema de raízes a partir de seu diagrama de Dynkin.
   (b) (08pts) Descreva os sistemas de raízes formados pelas raízes longas e curtas.

4. (08pts) Sejam R o sistema de raízes de uma álgebra semi-simples $\mathfrak{g}$ e $x_i^{\pm}, h_i, i \in I$, geradores de $\mathfrak{g}$ como no Teorema de Serre. Considere a correpondente subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, denote por $\{\omega_i : i \in I\}$ a base de $\mathfrak{h}^*$ dual à base $\{h_i : i \in I\}$ de $\mathfrak{h}$ e por R^+ o correspondente subconjunto de raízes positivas. Se $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R^+} \alpha$, mostre que $\sigma_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ para toda raíz simples α e que $\rho = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$ (σ_α denota a reflexão associada a α).

5. (08pts) Defina subálgebra de Borel e descreva as subálgebras de Borel de uma álgebra semi-simples.

6. (12pts) Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ e $\lambda = 2\omega_1 + \omega_2$ onde $\omega_j, j = 1, 2$, são os pesos fundamentais com relação à escolha usual de raízes positivas e negativas em $\mathfrak{g}$. Encontre as órbitas da ação do grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$ por todos os pesos da representação irredutível de peso máximo λ.

7. Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ dois ideais de $\mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.
   (a) (06pts) Mostre que se V é representação de $\mathfrak{g}_1$, pode-se de estender a ação de $\mathfrak{g}_1$ em V a uma de $\mathfrak{g}$ em V de modo que $\mathfrak{g}_2$ aja trivialmente.
   (b) (12pts) Mostre que as representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$ são da forma $V_1 \otimes V_2$ onde V_j é representação irredutível de $\mathfrak{g}_j$ com ação estendida a uma de $\mathfrak{g}$ como no ítem (a).

Exame de Qualificação do Doutorado

Análise Funcional

20/07/2011

RA........................ Nome....................................

1. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

(a) Existe um funcional linear contínuo $\phi : \ell_2 \to \mathbb{K}$ tal que $\phi(e_n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sendo $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$ o n-ésimo vetor unitário em ℓ_2.

(b) Se E é um espaço normado, e $x_n \to 0$ na topologia fraca, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada em E.

2. Seja E um espaço normado.

(a) Prove que cada subespaço vetorial próprio de E tem interior vazio.

(b) Sejam $a_1, ..., a_n \in E$ e $\varepsilon > 0$ dados. Se $\dim E \geq n$, prove que existem vetores linearmente independentes $x_1, ..., x_n \in E$ tais que $\|x_j - a_j\| < \varepsilon$ para $j = 1, ..., n$.

3. Seja $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ tal que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j$ converge para cada $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$. Prove que a sequência $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada.

Sugestão: considere os funcionais $\phi_n : \ell_1 \to \mathbb{K}$ definidos por

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$$

para cada $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$.

4. Sejam E e F espaços de Banach, e seja $T : E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetivo. Se F é separável, prove que existe um subespaço vetorial fechado separável E_0 de E tal que $T(E_0) = F$.

Sugestão: use o teorema da aplicação aberta.

5. Sejam $1 < p, q < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e seja $K \in L_q([0,1] \times [0,1])$.

(a) Prove que

$$\left(\int_0^1 |K(x,t)| dx \right)^q \leq \int_0^1 |K(x,t)|^q dx.$$

(b) Para cada $f \in L_p[0,1]$ prove que

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,t) f(t)| dt dx \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^q dx dt \right)^{1/q}.$$

(c) Se definimos

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt$$

para cada $f \in L_p[0,1]$, prove que T é um operador linear contínuo de $L_p[0,1]$ em $L_1[0,1]$.

Sugestão: use a desigualdade de Hölder e o teorema de Fubini.

1	2	3	4	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Geometria Riemanniana.

NOME:____ **RA:**________________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1^a Questão. Responda Verdadeiro ou Falso. Justifique.

i- Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma geodésica de M e $a,\ b \in \mathbb{R}$. Então $J(t) = (a+tb)\dot{\gamma}(t)$ define um campo de Jacobi ao longo de γ.

ii- Sejam M uma subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana N. Então M é totalmente geodésica se, e so se, todas as segundas formas fundamentais de M se anulam.

iii- Se M é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K(p,\sigma) \leq 0$ para todo $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ então a aplicação exponencial é um difeomorfismo local.

iv- Sejam M e N variedades Riemannianas tais que a inclusão $i : M \to N$ é isométrica. Então $d_M \leq d_N$.

2^a Questão. Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ ||x|| = 1\}$ a esfera unitaria com a métrica induzida pelo mergulho canônico.

i- Mostrar que as geodésicas coincidem com os circulos máximos.

ii- Dado $p \in S^n$ determinar $\exp_p : T_pS^n \to S^n$.

3^a Questão. Seja M uma variedade Riemanniana. Defina conexão sem torção. Mostrar que ter uma conexão sem torção em M é equivalente a ter um mapa linear Hess do espaço das funções C^∞ nas formas bilineares simétricas que satisfaz

$$\mathrm{Hess}(f^2) = 2f\mathrm{Hess}(f) + 2df \otimes df.$$

4^a Questão.

a) Defina campos de Jacobi.

b) Resolva a equação dos campos de Jacobi para espaços de curvatura constante em termos de um campo paralelo.

c) Para $\gamma : [0,\infty) \to S^n$ uma geodésica parametrizada no comprimento de arco, determinar a dimensão do espaço dos campos de Jacobi J ao longo de γ tais que $J_0 = 0 = J_t$ para $t > 0$.

d) Utilize o teorema do indice de Morse para computar os indices e nulidades das geodésicas em S^n.

1	2	3	4	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Grupos de Lie.

NOME:____ **RA:**______________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1^a Questão. Sejam G e H grupos de Lie e $\phi : G \to H$ um homomorfismo contínuo. Mostre que o seu gráfico grafϕ é um subgrupo de Lie de $G \times H$. Descreva a álgebra de Lie de grafϕ.

2^a Questão. Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $K, L \subset G$ dois subgrupos com subálgebras de Lie $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{l}$ respectivamente. Suponha que K é compacto e L é fechado. Suponha também que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{l}$ e mostre que $G = KL$. Mostre também que a ação de K em G/L (restrição da ação de G) é transitiva e que G/L é compacto.

3^a Questão. Seja $H \subset G$ um subgrupo de Lie conexo. Mostre que H é normal em seu fecho fe$H$. Dê um exemplo.

4^a Questão. Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que os autovalores de $\mathrm{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$ são imaginários puros. Conclua que a forma de Cartan-Killing $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$ de $\mathfrak{g}$ é negativa semi-definida.

5^a Questão. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. Justifique a resposta apresentado uma demonstração ou um contra-exemplo.

1. Se um grupo de Lie G é compacto e não abeliano então todos os seus subgrupos de Lie são compactos.
2. Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie conexo. Tome $g \in G$ e suponha que $gHg^{-1} \subset H$. Então, $gHg^{-1} = H$.
3. Sejam G e H dois grupos de Lie conexos com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie isomorfas então existe um isomorfismo $\phi : G \to H$ ou um isomorfismo $\psi : H \to G$.
4. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $H \subset G$ é um subgrupo de Lie com subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ então H é fechado se $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

1	2	3	4	5	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Topologia Algébrica.

NOME:____ **RA:**________________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1^a Questão. Responda Verdadeiro ou Falso. Justifique.

i- S^n tem um campo vetorial não nulo se, e somente se, n é ímpar.

ii- Seja M um meridiano da esfera S^2 que conecta o polo norte N e o polo sul S (i.e. N e $S \in M$) e $p \in M$. Então $(S^2 - p, M - p) \to (S^2, M)$ não é uma excisão.

iii- $S^2 \vee S^4$ e $\mathbb{C}P^2$ tem os mesmos grupos de Homologia.

iv- $S^1 \vee S^1$ é um retrato de $S^1 \times S^1$.

2^a Questão. Seja G um grupo. Um espaço $K(G, 1)$ é um espaço conexo por caminhos com cobrimento universal contráctil e cujo grupo fundamental é isomorfo a G.

i- De um exemplo de um $K(\mathbb{Z}, 1)$ espaço e de um $K(\mathbb{Z}^2, 1)$ espaço.

ii- Mostrar que se X é um complexo CW conexo e G é um grupo tal que todo homomorfismo $\phi : \pi_1(X) \to G$ é trivial então todo mapa $f : X \to K(G, 1)$ é homotopicamente nulo.

3^a Questão. Seja X um complexo CW então $H_i(X \times S^n) \simeq H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$ para todo $i \geq 0$ e $n \geq 0$, onde $H_i = 0$ para $i < 0$. (Dica: Sequência de Mayer-Vietoris relativa, i.e. se (X, X_1, X_2) é uma tripla exata tal que $X = X_1 \cup X_2$ e $B \subset X_1 \cap X_2 = A$ então

$$\cdots \to H_q(A, B) \to H_q(X_1, B) \oplus H_q(X_2, B) \to H_q(X, B) \to H_{q-1}(A, B) \to \cdots)$$

4^a Questão. Seja X o espaço obtido de identificar três pontos (diferentes entre si) na fronteira de uma dois celula.

i- Calcule o grupo fundamental de X.

ii- Calcule a homologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

ii- Estabeleça a relação entre $H_1(X)$ e $\pi_1(X, x_0)$.

5^a Questão. De um exemplo de um espaço X que tenha grupos de homologia $H_0(X, \mathbb{Z}) = H_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_q(X, \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < q < n - 1$ (com $n > 0$ arbitrario). Justifique.