Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 12 de Julho de 2013.

1. Questão.

(a) (0.5) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Escreva as definições de uma aplicação diferenciável f e de derivada de uma aplicação f.

(b) (1.0) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M$, para todo $x \in U$ e $i = 1, ..., n$, então $f(\Omega)$ é limitado quando $\Omega \subset U$ é limitado e convexo.

2. Questão. (2.0) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Dizemos que um ponto crítico $a \in U$ é não-degenerado quando a matriz Hessiana de f em a é inversível. Mostre que se $a \in U$ é um ponto crítico não-degenerado, então a é um ponto crítico isolado.

3. Questão.

(a) (1.5) Demonstre o teorema da aplicação inversa usando o teorema do posto.

(b) (1.0) Mostre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então f não é sobrejetora.

4. Questão. (1.5) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Mostre que se S é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^n$ e existe um compacto K tal que $S \subset K \subset U$, então $f(S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

5. Questão. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e limitado tal que $S = \partial\Omega$ é uma superfície conexa de classe C^∞.

(a) (0.5) Enuncie o teorema da divergência em Ω (Teorema de Gauss).

(b) (1.0) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação de classe C^1. Mostre que se $div(F) \equiv 0$ então F é tangente a $\partial\Omega$ em algum ponto.

(c) (1.0) Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Mostre que

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

onde $\Delta u = \Sigma_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada de u na direção do vetor normal a $\partial\Omega$.

MM719 - 1S 2013 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 10. Bom trabalho!

1. (0,5) Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y - z, z + x - y)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x - y$. Calcule a expressão do funcional linear $T^*(f)$ com respeito à base canônica (aqui, $T^* = T^t$ é a transposta (adjunta) de T).

2. Suponha que a matriz de um operador linear T em $\mathbb{R}^4$ na base canônica seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (2,0) Encontre uma base de Jordan.

   (b) (1,0) Descreva todos os subespaços T-invariantes.

3. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando suas respostas.

   (a) (0,5) Se duas matrizes A, B possuem o mesmo polinômio mínimo e o mesmo polinômio característico, então elas são semelhantes.

   (b) (0,5) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, então V^* é isomorfo a $V_1^* \oplus V_2^* \oplus \cdots \oplus V_m^*$.

   (c) (0,5) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $PAP^{-1} = A^t$.

   (d) (0,5) Para todo operador linear T em um espaço vetorial real qualquer se tem $\{f \in \mathbb{R}[t] : f(T) = 0\} \neq \{0\}$.

   (e) (0,5) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e T^* é a adjunta de T com respeito a produtos internos dados em V e W, então $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{I}m(T)^\perp$.

   (f) (0,5) Se f é uma forma bilinear simétrica em V e $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de V tal que $f(v_i, v_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então f é não degenerada.

   (g) (0,5) Se V é espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V, V)$, então existe operador auto-adjunto S tal que $S^2 = T^* \circ T$.

4. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e V um espaço vetorial real de dimensão n com produto interno. Dada uma base ortonormal α de V, considere o operador linear T tal que $[T]_\alpha^\alpha = A$ e a forma bilinear simétrica f tal que $[f]_\alpha = A$.

   (a) (0,5) Determine se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: Se β é base de V tal que $[f]_\beta$ é diagonal, então $[T]_\beta^\beta$ também é diagonal.

   (b) (1,0) Suponha que $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e que α seja a base canônica. Encontre base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ e $[f]_\beta$ sejam diagonais.

5. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Lembre que o posto de um vetor $u \in V \otimes W$ é o menor inteiro não negativo m tal que existem $v_1, \ldots, v_m \in V, w_1, \cdots, w_m \in W$ satisfazendo $u = \sum_{j=1}^m v_j \otimes w_j$.

   (a) (1,0) Mostre que se numa tal expressão tivermos $v_1, \ldots, v_m$ linearmente independentes, então o posto de u é a dimensão do subespaço gerado por $w_1, \ldots, w_m$.

   (b) (0,5) Calcule o posto de

   $$(2, 3, -1) \otimes (1, -2) + (3, -1, 0) \otimes (2, 2) + (0, -1, 2) \otimes (-1, 3) + (1, 0, -3) \otimes (3, -1) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2.$$

   (c) (1,0) Mostre que existe única $\varphi : V^* \otimes W \to \mathcal{L}(V, W)$ linear injetora tal que $\varphi(f \otimes w)(v) = f(v)w$ para todo $f \in V^*, w \in W, v \in V$.

   (d) (1,0) Suponha que V e W tenham dimensão finita e seja φ como em (c). Mostre que para todo $u \in V^* \otimes W$, o posto de u coincide com o de $\varphi(u)$.

Exame de Qualificação

Topologia Geral

10/07/2013

RA...........................Nome...

Nesta prova todos os espacos topológicos são não vazios. Ao resolver cada questão, enuncie os resultados utilizados.

1. (a) Prove que a família

$$\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

é base de uma topologia τ em $\mathbb{R}$.

(b) Prove que τ é mais fina que a topologia usual de $\mathbb{R}$.

(c) Prove que (a, ∞) e $(-\infty, b]$ são abertos e fechados em $(\mathbb{R}, \tau)$.

(d) Se definimos $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ por $f(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$, prove que f é contínua.

2. Seja $X = \{a, b\}$ um conjunto com dois pontos.

(a) Exiba uma topologia τ_1 em X tal que (X, τ_1) seja Hausdorff.

(b) Exiba uma topologia τ_2 em X tal que (X, τ_2) seja regular, mas não seja Hausdorff.

(c) Exiba uma topologia τ_3 em X tal que (X, τ_3) não seja nem regular nem Hausdorff.

3. Seja X um espaço topológico compacto, e seja $\mathcal{F}$ uma família de funções de X em $\mathbb{R}$ tal que:

(i) Para cada $a \in X$ existem uma função $f_a \in \mathcal{F}$ e um aberto U_a contendo a tal que $f_a(x) = 0$ para todo $x \in U_a$.

(ii) Se $f, g \in \mathcal{F}$, então $fg \in \mathcal{F}$.

Prove que a função identicamente nula pertence a $\mathcal{F}$.

4. Seja X o conjunto das matrizes reais A de 2×2 tais que $AA^t = A^t A = I$. Considere X como subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(a) Prove que $\det A = \pm 1$ para cada $A \in X$.

(b) Prove que X é desconexo.

5. Seja X um espaço topológico, seja $\{Y_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, e seja $Y = \prod_{i \in I} Y_i$. Dadas $f, g \in C(X; Y)$, prove que $f \simeq g$ se e só se $\pi_i \circ f \simeq \pi_i \circ g$ para todo $i \in I$.