Exame de Qualificação Grupos de Lie 20/2/2015

Nome e RA:

Escolha 5 questões

1. Dado um grupo de Lie G, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, sejam $H, K \subset G$ subgrupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{k}$, respectivamente, tais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$. Mostre que o conjunto HK é aberto em G. Mostre também que se G é conexo e K é normal então $G = HK$.

2. Seja $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com determinante 1 e entradas inteiras. Mostre que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$ é um subgrupo discreto de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e que a variedade diferenciável $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z})$ não admite estrutura de grupo de Lie.

3. Mostre que o grupo $\mathrm{SU}(n)$ é simplesmente conexo e descreva todos os grupos de Lie conexos com álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$.

4. Seja $P = G \times_\rho H$ um produto semi-direto com G e H grupos de Lie conexos e $\rho : G \to \mathrm{Aut} H$ um homomorfismo diferenciável. Suponha que H seja unimodular. Mostre que se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é semi-simples então P é unimodular.

5. Sejam G um grupo de Lie e $S \subset G$ um subsemigrupo (isto é, se $g, h \in S$ então $gh \in S$) com $1 \in S$. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G e mostre que o conjunto
$$\mathcal{L}(S) = \{X \in \mathfrak{g} : \forall t \geq 0, \exp tX \in \mathrm{fe} S\}$$
satisfaz as seguintes propriedades: (i) $\mathcal{L}(S)$ é um cone convexo fechado, isto é, dados $X, Y \in \mathcal{L}(S)$ e a, b reais > 0 então $aX + bY \in \mathcal{L}(S)$; (ii) se $\pm X \in \mathcal{L}(S)$ então $e^{t \mathrm{ad}(X)} \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

6. Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie conexo com subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Mostre que $g \in G$ normaliza H (i.e., $gHg^{-1} \subset H$) se e só se g normaliza $\mathfrak{h}$, isto é, $\mathrm{Ad}(g) \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$. Mostre também que o normalizador $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} \subset H\}$ é subgrupo fechado.

7. Dê, se possível, exemplos para cada uma das situações a seguir. Justifique os exemplos e, caso não exista um exemplo, forneça uma demonstração.

   (a) Grupos de Lie G e H conexos que não são isomorfos e tais que suas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas e seus grupos fundamentais $\pi_1(G)$ e $\pi_1(H)$ também são isomorfos.

   (b) Um grupo de Lie G conexo e não abeliano tal que a imagem de sua representação adjunta $\mathrm{Ad}(G)$ é um grupo abeliano.

   (c) Um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é solúvel e que não é unimodular.

   (d) Um grupo de Lie G cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel e tal que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ não é difeomorfismo.

8. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. Justifique a resposta apresentado uma demonstração ou um contra-exemplo.

   (a) Seja K um grupo de Lie compacto não abeliano com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Então, $\exp : \mathfrak{k} \to K$ não é uma aplicação de recobrimento.

   (b) Se G é um grupo de Lie nilpotente conexo e simplesmente conexo então todo subgrupo conexo de G é fechado.

   (c) Se G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\phi : \mathbb{R} \to G$ é um homomorfismo contínuo então existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\phi(t) = e^{tX}$.

   (d) Um grupo de Lie G não admite subgrupos pequenos, isto é, existe um aberto U contendo o elemento neutro 1 que não contém nenhum subgrupo de G diferente de $\{1\}$.

Exame de Qualificação **Topologia Algébrica** **20/2/2015**
Nome e RA:

Escolha 5 questões

1. Descrever as superfícies fechadas (variedades topológicas 2- dimensionais sobre $\mathbb{R}$, compactas, sem fronteira). Para cada uma delas descrever seu $\pi_1, H_0(\;,\mathbb{Z})$, $H_1(\;,\mathbb{Z})$, e $H_2(\;,\mathbb{Z})$.
2. Descrever uma estrutura celular (de CW complexo) para $SO(4), SO(5)$ e $SO(6)$.
3. Descrever a fibração de Hopf $S^3 \dashrightarrow S^7 \longrightarrow S^4$ e sua sequência exata de homotopia.
4. Descrever a fibração de Hopf $S^7 \dashrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8$ e sua sequência exata de homotopia.
5. Seja $X \subset \mathbb{R}^3$ (euclideano) a união de n retas pela origem. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.
6. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. Justifique a resposta apresentado uma demonstração ou um contra-exemplo.
   (a) Para qualquer grupo G existe CW complexo X, com $\dim X \leq 2$, com $\pi_1(X)$ =G.
   (b) Se $A \subset X$ é um subespaço topológico fechado, então a inclusão acima tem a propriedade de extensão de homotopia.
   (c) Existe aplicação contínua $h : D^5 \longrightarrow D^5$, disco euclideano fechado com 5 dimensões, com $h(x) \neq x, \forall x \in D^5$.
   (d) O complexo CW, dois dimensional, com uma célula e^0,uma célula e^1,uma célula e^2 colada no 1-esqueleto por $z \longmapsto z^3$, é homotopicamente equivalente à uma superfície fechada.

7. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. Justifique a resposta apresentado uma demonstração ou um contra-exemplo.

   (a) O grupo quaterniônico $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, (a) age livremente sobre a esfera S^7, e (b) o espaço quociente S^7/Q é um grupo topológico.

   (b) Existe variedade topológica M^6, com $\pi_1(M^6) = \mathbb{Z}_5$, tal que o recobrimento universal de M^6 é a esfera S^6.

   (c) Existe fibrado $S^3 \dashrightarrow S^{15} \longrightarrow S^{12}$.

   (d) O recobrimento de um recobrimento é recobrimento.

8. Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa. Justifique a resposta apresentado uma demonstração ou um contra-exemplo.

   (a) O cilíndro $S^1 \times [-1, 1]$ e M: a faixa de Möbius com fronteira são (a) homotopicamente equivalentes (b) homeomorfos.

   (b) Se $p : X \longrightarrow Y$ é recobrimento e $h : Y \to Z$ aplicação contínua, tal que $h \circ p$ é homotópica à constante, então h também é homotópica à constante.

   (c) O grupo clássico $U(6)$ com a estrutura topológica usual é (a) homeomorfo ao $SU(6) \times U(1)$ (usual) (b) não são isomorfos como grupos.

   (d) $\pi_{14}(SO(17)) = \{0\}$.