DM–IMECC–UNICAMP

Exame de Qualificação de Mestrado – Análise no $\mathbb{R}^n$ 23/02/2015

Cada questão vale 2,0 pontos.

1. a) Mostre que a bola $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$ é um conjunto compacto, mostrando que é um conjunto fechado e limitado.

b) Mostre que a função $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{sen}x_1$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, tem um máximo (global) em $\mathbb{R}^n$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada pela equação $f(x) = |x|^2 x$.

a) Mostre que f é uma aplicação de classe C^∞ e que leva a bola aberta $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < 1\}$ na mesma de forma bijetiva.

b) Calcule a matriz jacobiana $Jf(x)$ e a transformação derivada $f'(x) \cdot h$, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}^n$.

c) Mostre que f leva uma bola aberta centrada em $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ em um conjunto aberto.

d) Mostre que a inversa de f não é diferenciável na origem.

3. Seja $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 ($\nabla f(x) \neq 0,\ \forall x; f(x) = c$). Mostre que $M = f^{-1}([c, \infty))$ é uma variedade com bordo orientável e descreva os espaços tangentes em um ponto em ∂M e em um ponto em $M - \partial M$.

4. a) Seja M uma $k + l + 1$ variedade (de classe C^∞) em $\mathbb{R}^n$ orientada e com bordo. Sejam ω uma k-forma e η uma l-forma, ambas (de classe C^∞) definidas em um aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo M. Mostre a "fórmula de integração por partes"

$$\int_M \omega \wedge d\eta = \int_{\partial M} \omega \wedge \eta \, - \, (-1)^k \int_M d\omega \wedge \eta.$$

b) Usando o item **a)**, mostre que se M é uma n variedade (de classe C^∞) em $\mathbb{R}^n$ orientada com bordo (não vazio) e conexa, e f é uma função de classe C^∞ em um aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo M, tal que $\Delta f\big|M = 0$ ($\Delta f := \sum_{i=1}^n \partial^2 f/\partial x_i^2$) e $f\big|\partial M = 0$, então $f\big|M = 0$.

Sugestão: mostre que $\Delta f = d(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n)$, onde $\widehat{dx_i}$ significa que dx_i é omitido, e tome $\omega = f$ e $d\eta = \Delta f$.

5. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, z um vetor do $\mathbb{R}^n$ e B a bola fechada $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$. Mostre que

$$\int_B f(x \cdot z)\, dx = \int_B f(x_n |z|)\, dx$$

onde $x \cdot z$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$
($x \cdot z = \sum_{j=1}^n x_j z_j;\ \ x = (x_1, \cdots, x_n),\ z = (z_1, \cdots, z_n)$).

Exame de Qualificação 2:2014 - Topologia Geral

NOME:____ RA:__________

Escolha 5 questões das seguintes:

1. Calcular o grupo fundamental de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0),(0,1)\}$.

2. Provar que $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$ se $n \geq 2$.

3. Sejam X um espaço de Tychonoff, Y um espaço Hausdorff compacto e $h : X \to Y$ uma função continua. Provar que existe uma $\tilde{h} : \beta X \to Y$ continua tal que $\varepsilon_X \circ \tilde{h} = h$. Onde $(\beta X, \varepsilon_X)$ é a compactificação de Stone-Cech de X.

4. Seja X um espaço topologico normal e T_1 e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura por abertos para X. Mostrar que existem funções continuas $f_1, \cdots, f_n : X \to [0,1]$ tais que $f_1 + \cdots + f_n = 1$ e para cada $i = 1, \cdots, n$, $\overline{\{x : f_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$.

5. Seja X um espaço topologico não vazio e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro de X. Provar que se $x \in X$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{U}$ então $\mathcal{U}$ converge a x.

6. Seja X um espaço topologico Hausdorff e K um subconjunto compacto de X. Sejam U e V abertos tais que $K \subset U \cup V$ Provar que existem dois compactos disjuntos K_1 e K_2 de X tais que $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \subset U$ e $K_2 \subset V$.

7. Prove que o produto arbitrario de espaços compactos é compacto.

8. Prove que o produto arbitrario de espaços conexos é conexo.