Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 12 de Dezembro de 2012.

1. Questão. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M$, para todo $x \in U$ e $i = 1, ..., n$. Se $\gamma : (0,1) \to U$ é de classe C^1 tal que $|\gamma'(t)| \leq h(t)$ com $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, é possível afirmar que $f(\gamma(t))$ é uma função limitada? Justifique sua resposta.

2. Questão. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é dita convexa quando

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \ \forall x, y \in U \text{ e } \lambda \in [0,1].$$

(a) Mostre que se f é convexa e de classe C^2, então sua forma quadrática hessiana é não-negativa em todos os pontos de U. **Sugestão:** Considere a função $\varphi(t) = f(x + tv)$ com $x \in U$, $x + v \in U$ e $t \in [0,1]$. Depois use o fato que, no caso $n = 1$ e f de classe C^2, ser convexa é equivalente a $f''(t) \geq 0, \forall t \in U$.

(b) Mostre que se f é convexa e de classe C^2, então todo ponto crítico de f é um ponto de mínimo global.

3. Questão.

(a) Mostre o teorema da aplicação inversa, usando o teorema da aplicação implícita.

(b) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Mostre que se existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que o conjunto $f^{-1}(y_0)$ possui um ponto de acumulação $x_0 \in U$, então $f'(x_0)$ não é injetiva.

4. Questão. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e limitado tal que $S = \partial\Omega$ é uma superfície de classe C^1.

(a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação de classe C^1. Usando o Teorema de Stokes (em sua forma mais geral), mostre que

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n)dS \quad \text{(Teorema da Divergência)}.$$

(b) Mostre que se $div(F) \equiv 0$ então F é tangente a $\partial\Omega$ em algum ponto.

5. Questão. Sejam ω_1 e ω_2 formas diferenciais de classe C^∞ em uma variedade diferenciável M de classe C^∞. Mostre que se ω_1 é fechada e ω_2 é exata, então $\omega_1 \wedge \omega_2$ é exata.

MM719 - 2S 2012 - Exame de Qualificação

Nome: ____________________________________ RA: __________

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 10. Bom trabalho!

1. (2,0) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z, w) = (2x, x + 2y, x + y + 2z + w, z - w).$$

   Encontre uma base β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ esteja em forma canônica de Jordan e calcule $[T]_\beta^\beta$.

2. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando suas respostas.

   (a) (0,5) Se duas matrizes A, B possuem o mesmo polinômio mínimo e o mesmo polinômio característico, então elas são semelhantes.

   (b) (0,5) Suponha V tem dimensão finita e que o polinômio mínimo de $T \in L(V, V)$ seja da forma $(1 - a)^m$ para algum escalar a e inteiro m. Então os únicos subespaços T-invariantes de V que possuem complementar T-invariante são V e $\{0\}$.

   (c) (0,5) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, então V^* é isomorfo a $V_1^* \oplus V_2^* \oplus \cdots \oplus V_m^*$.

   (d) (0,5) Se $T \in L(V, V)$ e $S \in L(W, W)$ são diagonalizáveis, então $T \otimes S$ é diagonalizável.

   (e) (0,5) Se T é um operador linear no espaço vetorial V, W é um subespaço de V e $U = V/W$, então exite um único operador linear S em V/W tal que $S(\bar{v}) = \overline{T(v)}$ para todo $v \in V$ (aqui $\bar{v} = v + W$).

   (f) (0,5) Se f é uma forma bilinear (simétrica ou alternada) em um espaço vetorial V de dimensão finita e W é um subespaço de V não degenerado com respeito a f, a função $T : V \to W^*$ dada por $T(v)(w) = f(v, w)$ para todo $v \in V, w \in W$ é linear e sobrejetora.

3. (1,0) Escreva a definição de potência exterior de um espaço vetorial e mostre sua existência.

4. (1,0) Suponha que T seja um operador linear anti-autoadjunto em um espaço vetorial real de dimensão finita. Descreva as possibilidades para a forma canônica de Jordan real de T.

5. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T \in L(V, V)$.

   (a) (0,5) Mostre que se T é autoadjunto, então $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle T(u), v \rangle$ é uma forma bilinear simétrica em V.

   (b) (1,0) Se f é como em (a), mostre que existe base ortonormal de V que também é ortogonal com respeito a f.

   (c) (1,5) Suponha que exista uma base ortonormal α de V tal que $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Encontre uma base β de V como em (b) descrevendo as coordenadas de seus vetores em relação a α.

6. (1,0) Sejam $A_1, \cdots, A_k$, matrizes quadradas com entradas num corpo $\mathbb{K}$. Mostre que, se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots & B_{1,k} \\ 0 & A_2 & B_{2,3} & \cdots & B_{2,k} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix}$$

   com 0 representando matrizes nulas e $B_{i,j}$ matrizes arbitrárias do tamanaho apropriado, então $\det(A) = \prod_{j=1}^{k} \det(A_j)$.

7. (1,0) Sejam V e W dois espaços vetoriais. Mostre que existe única $\varphi : V^* \otimes W \to L(V, W)$ linear tal que $\varphi(f \otimes w)(v) = f(v)w$ para todo $f \in V^*, w \in W, v \in V$.