Exame de Qualificação do Doutorado

Análise Funcional

14/12/2011

RA........................ Nome....................................

1. Seja E um espaço normado, seja M um subespaço fechado de E, e seja $\pi : E \to E/M$ a aplicação quociente.

(a) (0,5) Defina $\|\pi(x)\|$ para cada $x \in E$.

(b) (1,5) Se M e E/M são completos, prove que E é completo.

2. Seja E um espaço normado. e seja $\phi : E \to \mathbb{K}$ um funcional linear, $\phi \neq 0$.

(a) Prove que o espaço quociente $E/\phi^{-1}(0)$ tem dimensão um.

(b) Se $\phi^{-1}(0)$ é fechado em E, prove que ϕ é contínuo.

3. Sejam E e F espaços normados, e seja $T : E \to F$ um operador linear contínuo.

(a) (0,5) Se existir $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq \delta\|x\| \quad \text{para todo } x \in E,$$

prove que $T : E \to T(E)$ é um isomorfismo topológico.

(b) (1,5) Se o operador $T' : F' \to E'$ for sobrejetivo, prove que $T : E \to T(E)$ é um isomorfismo topológico.

Sugestão: Use o teorema da aplicação aberta.

4. Seja E um espaço com produto interno, e seja $\{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal infinito em E. Prove que $\{x_i : i \in I\}$ é um subconjunto fechado e limitado de E, mas não é compacto.

5. Seja E um espaço de Hilbert, e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal em E. Prove que o conjunto

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : |\lambda_n| \leq 1/n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é compacto.

Sugestão: Prove que a função

$$f : (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbb{D}}(0; 1/n) \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in E$$

é contínua.

Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 07/12/2011

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

1. Mostre que:
   (a) Se B é um subanel de $\mathbb{Q}$ (corpo dos números racionais) que contém propriamente o anel de inteiros $\mathbb{Z}$ então B não é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.
   (b) Sejam A um anel e B um subanel de A tal que A é inteiro sobre B. Mostre que $I \cap B \neq \{0\}$, para todo ideal não nulo I de A.
   (c) Se R é um anel e $I \subseteq R$ é um ideal finitamente gerado não nulo tal que $I^2 = I$ então existe um ideal maximal $\mathbf{m}$ de R que **não** contém I.
   (d) Para inteiros positivos, m e n, relativamente primos, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.
   (e) Se $B = \{x \in A \mid \sigma(x) = x \text{ para todo } \sigma \in G\}$, onde G um grupo finito de automorfismos de um anel A, então B é um subanel de A e A e inteiro sobre B.

2. Seja R um anel tal que para todo $x \in R$, $x \neq 0$, tem-se que $R/(x)$ é finito. Demonstre as seguintes afirmações.
   (a) R é anel noetheriano. Mais ainda se R não é domínio, então R é Artiniano.
   (b) Se R é domínio, então todo ideal próprio e não nulo tem uma única decomposição primária minimal.
   (c) Se R é domínio principal e M é R-módulo finitamente gerado, então $T(M) = \{m \in M \mid \text{existe } r \in R \setminus \{0\} \text{ tal que } rm = 0\}$, é finito.

3. Seja R um anel.
   (a) Defina, para um ideal primo $\wp$ de R, a altura de $\wp$ e enuncie o teorema generalizado de Krull para ideais.
   (b) Assuma que R é um domínio e mostre que R é integralmente fechado se e somente se $R_\wp$ é integralmente fechado para todo ideal primo $\wp$ de R ($R_\wp$ é o localizado de R no primo $\wp$).
   (c) Caso R seja um anel local noetheriano, com ideal maximal $\mathbf{m}$ de altura n, e $K = R/\mathbf{m}$, pergunta-se: Qual é a relação entre n e a dimensão do K-espaço vetorial $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$? Justifique em detalhes sua resposta.
   (d) Caso R seja um anel local noetheriano com ideal maximal $\mathbf{m}$ e $x \in \mathbf{m}$ um não divisor de zero, então $\dim R/(x) = \dim A - 1$ (dim significa dimensão de Krull).

4. Enuncie os chamados “Teorema do going-up” e “Teorema do going-down.”

Boa Prova

Álgebra Não Comutativa, MM 444, Semestre 2, 2011
Exame de Qualificação ao Doutorado, 07/12/2011

1. a) (0,5 pt) Definir *anel primitivo* R (à direita).

b) (1 pt) Mostrar que R é primitivo se, e somente se, existe um R-módulo A_R que é fiel e irredutível.

c) (0,5 pt) Enunciar o *Teorema sobre a Densidade*.

d) (2 pt) Demonstrar o teorema sobre a densidade.

2. (2 pt) Seja A uma F-álgebra central e simples ($\dim_F A < \infty$). Mostrar que toda derivação de A é interna.

(A transformação linear $\delta: A \to A$ é uma derivação se $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, $a, b \in A$. A derivação δ é interna se existe algum $x \in A$ com $\delta(a) = ax - xa$ para todo $a \in A$.)

3. (2 pt) Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das perguntas abaixo. Justificar as respostas! (Resposta sem a devida justificativa não será considerada.)

a) Se R é um anel e N é o conjunto dos elementos nilpotentes de R, então $N \subseteq J(R)$, o radical de Jacobson de R.

b) Todo anel R, primitivo à direita, é primo.

c) Existem subgrupos G do grupo $GL_n(F)$ (das matrizes invertíveis de ordem n sobre o corpo F) que são finitamente gerados, periódicos e infinitos.

d) Se F é um corpo, A é uma álgebra central e simples sobre F e $[A] \in B(F)$, o grupo de Brauer de F, então a ordem de $[A]$ em $B(F)$ é finita.

4. a) (0,5 pt) Definir *grupo de Brauer* de um corpo F.

b) (1 pt) Seja D um anel com divisão, $Z(D) = F$, $\dim_F D < \infty$. Mostrar que se K é um subcorpo maximal em D então $D \otimes_F K \cong M_n(K)$, onde $n = \dim_K D$.

c) (0,5 pt) Se D é anel com divisão, $Z(D) = F$, $\dim_F D < \infty$ e K é um subcorpo maximal em D, então $\dim_F K = \dim_K D = \sqrt{\dim_F D}$.

d) Mostrar que $B(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$, o grupo cíclico de ordem 2.

Boa prova

1	2	3	4	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Geometria Riemanniana.

NOME:____ RA:________________.

1^a Questão. (5.0) Responda Verdadeiro ou Falso. Justifique.

i- Sejam $\{J_1, \dots, J_k\}$ de Jacobi Linearmente independentes ao longo de uma geosésica $\gamma : [0,T] \to M$ que não possui pontos conjugados a $\gamma(0)$, então $\{\frac{D}{dt}J_1(t), \dots, \frac{D}{dt}J_k(t)\}$ são linearmente independentes para todo $t \in [0,T]$.

ii- Seja M uma variedade Riemanniana compacta de curvatura seccional positiva e dimensão par. Se M é não orientável então $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.

iii- Sejam M_1 e M_2 duas variedades Riemannianas completas de igual dimensão e $\gamma_i : [0,1] \to M_i$ $(i = 1,2)$ duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco. Assuma que $K_{M_1} < K_{M_2}$. Então $\mathrm{Ind}(\gamma_1) \leq \mathrm{Ind}(\gamma_2)$.

iv- Sejam M e N variedades compactas. Então $M \times N$ não admite uma métrica de curvatura seccional negativa.

v- Seja $\mathcal{K}$ a garrafa de Klein e $\mathbb{T}^3$ o Toro tridimensional. Então $M = \mathcal{K} \times \mathbb{T}^3$ admite uma métrica de curvatura seccional positiva.

2^a Questão. (2.0) Seja M uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional não positiva. Provar que qualquer clase de homotopia de caminhos com pontos fixos p e q em M contém uma única geodésica.

3^a Questão. (2.0) Seja $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica. Sejam $v \in T_{\gamma(0)}M$ e $w \in T_{\gamma(1)}M$. Assuma que $\gamma(a)$ não é conjugado de $\gamma(0)$. Mostre que existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = v$ e $J(a) = w$.

4^a Questão. (1.0) Sejam (x_1, x_2) as coordenadas usuais de $\mathbb{R}^2$. Defina uma conexão em $\mathbb{R}^2$ pelos seguinte símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \qquad \text{exceto} \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$$

i- Escreva e resolva as equações das geodésicas.

ii- A variedade é completa?

iii- Mostrar que se γ_1 e γ_2 são geodésicas tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1'(0) = k\gamma_2'(0)$, $k \in \mathbb{R}$ então $\gamma_1(t) = \gamma_2(kt)$ para todo t possível.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Grupos de Lie.

NOME:____ **RA:**________________.

1^a Questão. (1.0) Sejam G um grupo de Lie conexo em $D \subset G$ um subgrupo discreto (isto é, existe uma vizinhança $U \ni 1$ tal que $U \cap D = \{1\}$). Mostre que se D é normal então $D \subset Z(G)$ (= centro de G, $Z(G) = \{x : \forall y,\ xy = yx\}$).

2^a Questão. (2.0) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Mostre que o grupo $\mathrm{Aut}\,(G)$, com G conexo e simplesmente conexo, é um grupo de Lie. Mostre também que álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}\,(G)$ é a álgebra das derivações de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

3^a Questão. (2.0) Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie conexo com subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Mostre que $g \in G$ normaliza H (i.e., $gHg^{-1} \subset H$) se e só se g normaliza $\mathfrak{h}$, isto é, $\mathrm{Ad}\,(g)\,\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$. Mostre também que o normalizador $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} \subset H\}$ é fechado.

4^a Questão. (2.0) Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $G \times M \to M$ uma ação diferenciável de G e $F \subset M$ um subconjunto fechado. Defina

$$\mathfrak{g}_F = \{X \in \mathfrak{g} : \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \cdot F \subset F\}$$

(isto é, $\exp(tX) \cdot x \in F$ se $x \in F$). Mostre que $\mathfrak{g}_F$ é uma subálgebra de Lie.

5^a Questão. (1.5) Sejam G um grupo de Lie conexo e $H, K \subset G$ dois subgrupos tais que H é fechado e K é compacto. Denote por $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{k}$ as álgebras de Lie de G, H e K, respectivamente. Mostre que se $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ então $G = KH$.

6^a Questão. (1.5) Seja G um grupo de Lie conexo, compacto e não abeliano. Mostre que a aplicação exponencial não é um difeomorfismo local.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!