Exame de Qualificação do Mestrado

Topologia Geral

06/12/2013

RA......................Nome..

Ao resolver cada questão, enuncie cuidadosamente os resultados utilizados.

1. Seja X um espaço T_3, ou seja um espaço T_1 regular. Dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, prove que existem abertos U e V em X tais que $a \in U$, $b \in V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

2. Seja X um espaço topológico. Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos fechados de X tal que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Seja U um subconjunto aberto de X tal que

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset U.$$

Dado um subconjunto compacto K de X, prove que existem $i_1, ..., i_n \in I$ tais que

$$K \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \subset U.$$

3. Seja X um espaço topológico. Seja $\{S_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos conexos de X. Seja S um subconjunto conexo de X tal que $S \cap S_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Prove que o conjunto

$$S \cup \left(\bigcup_{i \in I} S_i \right)$$

é conexo.

4. Prove que os espaços X e Y não são homeomorfos entre si nos seguintes casos:

(a) $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{S}^1$.

(b) $X = [0, \infty)$, $Y = (0, \infty)$.

(c) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$.

5. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito x_0-*estrelado* ($x_0 \in \mathbb{R}^n$) se

$$(1 - t)x_0 + tx \in X \text{ para todo } x \in X,\ t \in [0, 1].$$

Prove que cada função f $\in C(X; Y)$ é homotópica a uma função constante nos seguintes casos:

(a) X é um subconjunto x_0-estrelado de $\mathbb{R}^n$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$) e Y é um espaço topológico.

(b) X é um espaço topológico e Y é um subconjunto y_0-estrelado de $\mathbb{R}^n$ ($y_0 \in \mathbb{R}^n$).

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$ – 09 de dezembro de 2013.

Nome:____________________________________

RA:______________________________________

1. Questão. (2.0) Sejam f e g duas funções diferenciáveis em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $f(0) = g(0)$ e que $(\nabla_x f)(0) = (\nabla_x g)(0)$. Seja h uma função definida em uma vizinhança Ω de 0, tal que, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ em Ω. Mostre que h é diferenciável em $x = 0$.

2. Questão. (1.5) Seja $\mathbb{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes reais $(x_{ij})_{n\times n}$. Seja $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det(x)$. Mostre que os valores máximo e mínimo de f na esfera

$$\sum_{i,j} x_{i,j}^2 = n$$

são 1 e -1, respectivamente, os quais são atingidos em matrizes ortogonais.

3. Questão.

(a) (1.5) Demonstre o teorema da aplicação implícita usando o teorema do posto.

(b) (1.0) Mostre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então f não pode ser injetora.

4. Questão. (2.0) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o gráfico de f, definido por

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a,b]\right\},$$

é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^2$.

5. Questão.

a) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e limitado tal que $\partial\Omega$ é uma superfície de classe C^∞. Mostre que se $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS,$$

onde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

e $\mathbf{n}$ denota a normal exterior a $\partial\Omega$. (Sugestão: escreva Δu como o divergente de um campo).

b) Represente por $\mathbf{E}(t,x)$ um campo elétrico e por $\mathbf{B}(t,x)$ um campo magnético, ambos suaves e aplicados em um ponto $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$. Um princípio básico de eletromagnetismo nos diz que

$$\nabla_x \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

onde $\nabla_x \times \mathbf{E}$ é o rotacional de $\mathbf{E}$ calculado somente na variável $x \in \mathbb{R}^3$. Suponha que C seja uma curva simples, fechada, suave por partes e orientada no sentido anti-horário. Demonstre que se S for qualquer superfície com $\partial S = C$ e orientada com normal $\mathbf{n}$ compatível com a orientação da curva (S está, assim, orientada no sentido positivo), então

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Observação: a integral da esquerda representa integral de linha sobre C.

Boa Prova!

Exame Qualificação - Álgebra Linear - 15/012/2013

Nesta prova $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotarão respectivamente os números racionais, reais e complexos. Também denotaremos por $\mathbb{M}_n(K)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo K e por $GL_n(K) \subset \mathbb{M}_n(K)$ o subconjunto das matrizes invertíveis.

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Respostas sem justificativas serão desconsideradas.

1. Responda cada uma das questões abaixo justificando suas respostas com detalhes.

a) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo:

a$_1$)(5pts) Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ é diagonal se e somente se existe $\tilde{P} \in GL_n(\mathbb{Q})$ tal que $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$ é diagonal.

a$_2$)(5pts) Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e alternada. Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é a matriz de f numa base β de $\mathbb{R}^n$ e n é impar então $det(A) = 0$.

b)(10pts) Verifique se $A, B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ são semelhantes ou não, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c)(10pts) Sejam K um corpo, V um K-espaço vetorial , $T : V \to V$ um operador linear injetor e $W \subseteq V$ um subespaço vetorial T-invariante. Mostre que : $\overline{T} : \frac{V}{W} \to \frac{V}{W}$ definido por $\overline{T}(v + W) = T(v) + W$ é um operador linear bem definido e, mais ainda, se a dimensão de W é finita então $\overline{T}$ tambem é injetor.

d) (10pts) Sejam $V = \mathbb{C}^n$ e $T : V \to V$ um operador linear injetor. Sabendo que dados $0 \neq z \in \mathbb{C}$ e um número natural $k \geq 1$, o polinômio $X^k - z \in \mathbb{C}[X]$ tem k raízes distintas duas a duas, mostre que: Se existe um número natural $m \geq 1$ tal que T^m é diagonalizável então T é diagonalizável. Mais ainda exiba um exemplo de um operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para o qual o resultado não é verdadeiro (ie, existe $m > 1$ com T^m diagonálizavel ,mas T não).

e)(10pts) Sejam $V = \mathbb{C}^n$ com produto interno $[\ ,\ ]$ e $T : V \to V$ um operador linear normal em relação ao produto interno dado. Mostre que: Se todo auto valor de T é real e estritamente positivo então T é operador positivo (ie, para todo $0 \neq v \in V$ tem-se que $0 < [v, T(v)]$).

---

2. Sejam K um corpo, V e W dois K-espaços vetoriais de dimensão finita n e m respectivamente.

a)10pts Enuncie a propriedade universal que define o espaço vetorial $V \otimes W$ e mostre que: Se $S : V \to V$ é um operador linear então existe uma único operador linear $S \otimes I : V \otimes W \to V \otimes W$ que satisfaz: para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$, $S \otimes I(v \otimes w) = S(v) \otimes w$.

c)10pts Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que:

c$_1$) Se $g(X) \in K[X]$ então $g(T \otimes I) = g(T) \otimes I$.

c$_2$) Se $f(X) \in K[X]$ então $f(T) = 0$ se e somente se $f(T \otimes I) = 0$. Conclua que T é diagonalizável se e somente se $T \otimes I$ é diagonalizável.

---

3. a)7pts Seja $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômio característico $f_T(X) = (X-1)^3(X-2)^3$. Afirmamos que se o polinômio mínimo de T é $p_T(X) = (X-1)^2(X-2)$ então a dimensão do espaço dos auto-vetores de T é igual a 5. Pergunta-se: Tal afirmação é falsa ou verdadeira?

b)13pts Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, w) = (x+y-2z, 2x+y+2w, x+z+w, -y+2z+w)$. Sabendo que o polinômio característico de T é $f_T(X) = (X-1)^4$ encontre a forma de Jordan de T e uma base de Jordan.

4.a)8pts Sejam K um corpo , $f : K^n \times K^n \to K$ uma forma bilinear, $A, B \in \mathbb{M}_n(K)$ duas matrizes simétricas. A afirmação A e B representam f (ie, existem bases α e β de K^n com $[f]_\alpha = A$ e $[f]_\beta = B$) se e somente se A e B são semelhantes é falsa ou verdadeira?

b)12pts Seja $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{2}xz$ uma forma quadrática definida sobre $\mathbb{R}^3$. Encontre uma matriz ortogonal U de forma que a troca de variáveis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sstisfaça $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, para convenientes a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Boa Prova