Exame de Qualificação ao Mestrado

Álgebra Linear

10/12/2010

Observação: Escolher itens de forma que o total seja no máximo 100 pontos.

$M_{m,n}(F)$ e $M_n(F)$ representam respectivamente os conjuntos de matrizes $m \times n$ e $n \times n$. Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$ denotamos por $A^* = (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ = conjugado complexo de a_{ij}, para todo par $1 \leq i, j \leq n$.

1. Responda verdadeiro ou falso para cada uma das afirmações abaixo. Justifique cada resposta.

(a) (3pts) A imagem de uma uma transformação multilinear é um subespaço do contradomínio.

(b) (3pts) Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$. Podemos ter $AB = I_m$ e $BA = I_n$ com $m \neq n$ (I_k representa a matrize identidade $k \times k$).

(c) (3pts) Para uma matriz $n \times n$ não invertível $A \neq 0$ existe uma matriz $B \neq 0$, $n \times n$, tal que $AB = 0$.

(d) (3pts) Se A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ são tais que $\operatorname{tr}(AA^* + BB^*) = 0$, então $A = 0 = B$ ($\operatorname{tr}(M)$ representa o traço da matriz M).

(e) (3pts) Os autovetores de um operador invertível T coincidem com os autovetores de T^{-1}.

(f) (3pts) Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $T^k = I$ para algum $k \geq 1$, então a forma canônica de Jordan de T tem um bloco $s \times s$, com $s > 1$.

(g) (3pts) Se T é um operador linear definidos sobre $\mathbb{C}^n$ tal que $< T(v), v >= 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$, então $T = 0$ ($< u, v >$ é produto interno usual de $\mathbb{C}^n$).

(h) (3pts) Seja K um corpo e F um subcorpo de K. Uma matriz $A \in M_n(F)$ que tem inversa em $M_n(K)$ também tem inversa em $M_n(F)$.

(i) (3pts) Existem matrizes invertíveis B e C tais que

$$BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz e adj$A$ a matriz adjunta de A. Representamos por $p(M)$ o posto de uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que:

(a) (2pts) se $p(A) = n$, então $p(\text{adj}A) = n$.

(b) (5pts) Se $p(A) = n - 1$, então $p(\text{adj}A) = 1$.

(c) (2pts) Se $0 \leq p(A) \leq n - 2$, então $p(\text{adj}A) = 0$.

3.(20pts) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ um operador linear para o qual $f(T) = 0$, onde $f(X) = (X-1)^2(X-2)^3$. Ache todos os possíveis polinômios característicos de T e descreva, em cada caso, as possíveis formas de Jordan de T. Descreva também todos os possíveis polinômios mínimos de T.

4.(20pts) Dado um espaço vetorial V sobre um corpo F que admite uma decomposição $V = V_1 \oplus V_2$, seja $T : V \to V$ um operador que deixa V_1 e V_2 invariantes. Denotemos por T_1 e T_2, respectivamente, as restrições de T a V_1 e V_2. Supondo-se que T_1 tem polinômio minimal $f(x)$ sobre F e analogamente T_2 tem polinômio minimal $g(x)$. Mostre que o polinômio minimal de T sobre F é o mínimo múltiplo comum de $f(x)$ e $g(x)$.

5. Dada a forma quadrática sobre os reais $\varphi(x,y,z) := 2x^2 - 4xy + 2xz + z^2$, seja $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a bilinear tal que $\varphi(x,y,z) = B((x,y,z),(x,y,z))$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (5pts) Sendo W é o subespaço gerado por $(0,0,1)$, encontre uma base para $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid B(v,w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$.

(b) (10pts) Sendo U um subespaço de V tal que a restrição de B a U é negativa definida e U tem dimensão máxima com essa propriedade, determine dim U.

6.(20pts) Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$ temos que A é diagonalizável se e somente se valer a seguinte condição: $(A - \lambda I_n)^m B = 0$ com $m \geq 1$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, e $\lambda \in \mathbb{C}$, implica $(A - \lambda I_n)B = 0$.

7. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1)$, e $v_4 = (1,3,0)$, vetores de V. Para $u = v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_3 + (v_1 + v_4) \otimes v_4 + v_4 \otimes v_2 \in V \otimes V$,

(a) (6pts) encontre o menor $m \geq 1$ de forma que $u = \sum_{j=1}^m u_j \otimes w_j$ com u_j, $w_j \in V$, para todo j.

(b) (3pts) Seja e_1, e_2, e_3 a base canônica de V. Escreva u na base $\{\, v_i \otimes e_j \mid i,j = 1,2,3 \,\}$.

Boa Prova!

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$
15 de Dezembro de 2010

1. Questão.

(a) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Escreva as definições de uma aplicação diferenciável f e de diferencial de uma aplicação f.

(b) Sejam $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo. Assuma que

$$|f(x) - f(y)|^{\theta_1} \leq K\,|x - y|^{\theta_2} \text{ para todo } x, y \in U,$$

onde $K > 0$ é uma constante. Mostre que f é constante em U.

2. Questão.

(a) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Dizemos que um ponto crítico $a \in U$ é não-degenerado quando a matriz Hessiana de f em a é inversível. Mostre que se $a \in U$ é um ponto crítico não-degenerado, então a é um ponto crítico isolado.

(b) Mostre que a recíproca do resultado contido no item **(a)** é falsa, mesmo no caso em que f não é constante.

3. Questão.

(a) Demonstre o teorema da aplicação implícita usando o teorema do posto.

(b) Mostre que se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^1, então f não é injetora.

4. Questão.

(a) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e limitado tal que $\partial\Omega$ é de classe C^∞. Assuma que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $F \in C^1$. Usando o Teorema de Stokes (em sua forma mais geral), mostre que

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n)dS \quad \text{(Teorema da Divergência).}$$

(b) Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Mostre que

$$\int_\Omega v\Delta u + (\nabla v \cdot \nabla u)\; dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

onde $\Delta u = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada de u na direção do vetor normal a $\partial\Omega$.
Sugestão: Considere o campo $F = v(\nabla u)$.

5. Questão. Sejam ω_1e ω_2 formas diferenciais de classe C^1 em uma variedade diferenciável M de classe C^2.

(a) Mostre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é fechada, se ω_1 e ω_2 são fechadas.

(b) Mostre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é exata, se ω_1 é fechada e ω_2 é exata.