Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
Inferência Avançada
25 de Fevereiro de 2016

Instruções:

1. A prova de Inferência Avançada é composta de 3 questões que devem ser respondidas de forma clara e completa.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

4. Valores das questões: 1) 3,3   2) 3,3   3) 3,4.

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $(0, \theta)$, onde $\theta > 0$ é um parâmetro. Considere $X = (X_1, \ldots, X_n)$, e defina as estatísticas

$$T(X) = X_{(n)} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{X_{(1)}}{X_{(n)}},$$

onde $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Mostre que T e V são independentes.

(b) Prove que T/θ é uma quantidade pivotal, e obtenha um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para θ baseado nessa quantidade pivotal.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Beta$(\theta, 1)$, ou seja, cada observação tem densidade de Lebesgue dada por

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x),$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro. Considere $X = (X_1, \ldots, X_n)$, e defina as variáveis aleatórias

$$Y_i = -\theta \log X_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(a) Determine a distribuição de Y_i.

(b) Encontre o estimador não viciado de variância uniformemente mínima de $g(\theta) = 1/\theta$.

(c) Obtenha um teste UMP de nível α para testar $H_0 : \theta \leq 1$ versus $H_1 : \theta > 1$.

3. Considere X uma variável aleatória com densidade de Lebesgue $f(\cdot|\eta, \beta)$ onde $\beta > 0$ e $\eta > 0$,

$$f(x|\eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta}\Big(\frac{x}{\eta}\Big)^{\beta-1} \exp\Big(-(x/\eta)^\beta\Big)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Observe que $\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{r-1}\, dt$ e que $E(X^r) = \eta^r\, \Gamma(1 + \frac{r}{\beta})$ para $r > 0$.

3.1. Supondo $\beta = \beta_0$ conhecido, determine o estimador não viciado de variância uniformemente mínima para η^{β_0}, e calcule a variância do estimador achado com base numa observação de X, digamos x. Generalize esse resultado para n observações $x_1, \ldots, x_n$ de uma amostra aleatória de X.

3.2. Considere a família das distribuições Inversa de Gama $IG(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$,

$$f(x|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(a+1)} \exp\Big(-\frac{b}{x}\Big)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Se η tem uma priori $IG(1, b_0)$, assumindo $\beta_0 = 1$, então: (a) mostre que a distribuição a posteriori de η é dada por

$$\eta | x \sim IG(2, x + b_0).$$

Nesse caso, (b) compute o estimador de Bayes para η sob a perda quadrática.

Exame de Qualificação – Probabilidade
Doutorado em Estatística
Fevereiro de 2016

Instruções:

1. A prova de Probabilidade é composta de 3 questões que devem ser respondidas de forma clara e completa.
2. Não é permitido consulta.
3. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

1. Define, o que significa que a família $(Y_n, n \geq 1)$ é uniformemente integrável. Quais condições suficientes para a integrabilidade uniforme você pode apresentar?

   (a) Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots$ v.a. i.i.d., com $\mathbb{E}X_1 = 0$ e $\operatorname{Var} X_1 < \infty$. Denote

   $$Y_n = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n).$$

   Mostre que a família $(Y_n, n \geq 1)$ é uniformemente integrável.

   (b) Sejam $(X_n, n \geq 1)$ e $(Y_n, n \geq 1)$ duas famílias uniformemente integráveis de v.a. Prove que $(X_n + Y_n, n \geq 1)$ é uniformemente integrável.

2. Seja (X_n) uma sequência de v.a. independentes tais que $\mathbb{P}[X_n = n^{2/3}] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{1}{3n}$. O que podemos dizer sobre a convergência em probabilidade da sequência (X_n)? Em distribuição? Em L_p (a resposta pode depender de p)? Quase certamente? Identifique $\limsup X_n$ e $\liminf X_n$ q.c.

3. Sejam (Z_n) v.a.i.i.d. com a distribuição Normal Padrão. O que podemos dizer sobre a convergência q.c. das seguintes séries?

   (a) $\sum \frac{Z_n}{n}$

   (b) $\sum \frac{|Z_n|}{n}$

   (c) $\sum \frac{Z_n^2}{n^2}$

   (d) $\sum \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$

   (e) $\sum \frac{Z_n}{\ln n}$