Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise Funcional - 25/07/2016

Nome: ______________________________ **RA:** ____________

Questão 1. (2,5 pontos) Sejam $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $H := L^2([0,1])$ munido do produto interno usual $(\cdot,\cdot)_{L^2}$. Defina $A : H \to H$ por

$$(Af)(x) = \varphi(x) \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt, \qquad x \in [0,1].$$

(a) Verifique que A está bem definido e é linear e limitado.
(b) Prove que A é auto-adjunto e não-negativo, ou seja, $(Af, f)_H \geq 0$, para toda $f \in H$.
(c) Mostre que existe $\lambda \geq 0$ tal que $A^2 = \lambda A$.
(d) Calcule $\sqrt{A}$.
(e) Mostre que A é um operador de projeção ortogonal se, e somente se, $\int_0^1 \varphi^2(t)dt = 1$.

Questão 2. (2,0 pontos) (a) Mostre que todo operador de posto finito em um espaço de Banach é compacto.
(b) Seja $(e_n)_{n\geq 1}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert separável $(H, (\cdot,\cdot))$. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência limitada de escalares e defina $T : H \to H$ por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x, e_n) e_n.$$

(i) Mostre que T está bem definido e é limitado.
(ii) Mostre que T é compacto se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Questão 3. (2,0 pontos)

(a) Sejam B um espaço de Banach e (ϕ_n) uma sequência em B' (o dual de B) tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| < \infty, \qquad \text{para cada } x \in B.$$

Defina $T : B \to l^1(\mathbb{N})$ por $Tx = (\phi_n(x))$. Mostre que T é limitado.

(b) Sejam E um espaço normado e (x_n) uma sequência em E tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi(x_n)| < \infty, \qquad \text{para cada } \phi \in E'.$$

Prove que

$$\sup_{\|\phi\|\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi(x_n)| < \infty.$$

Questão 4. (1,5 pontos) Seja E um espaço de Banach. Sejam (x_n) e (f_n) sequências em E e E', respectivamente.

(a) Mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e $f_n \to f$ em E' (na norma de E') então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.
(b) Mostre que se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ e $x_n \to x$ em E (na norma de E) então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Questão 5. (2,0 pontos) Suponha $1 \leq q < p < \infty$. Seja $a = (a_n)$ uma sequência de escalares com a seguinte propriedade: para toda sequência $(x_n) \in l^p(\mathbb{N})$ tem-se que $(a_n x_n) \in l^q(\mathbb{N})$. Defina o operador $M_a : l^p(\mathbb{N}) \to l^q(\mathbb{N})$ por $M_a((x_n)) = (a_n x_n)$.

(a) Mostre que M_a é um operador linear e contínuo. (Sugestão: use o Teorema do Gráfico Fechado).
(b) Prove que $a \in l^r(\mathbb{N})$ e $\|M_a\| = \|a\|_{l^r}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$.

1	2	3	4	5	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Julho 2016 - **Topologia Geral**.

NOME:____ **RA:**________________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1) a) Calcule o grupo fundamental de $\mathbf{RP}^2$ o espaço projetivo real.

b) Sejam G um grupo topologico e $\alpha,\ \beta : [0,1] \to G$ tais que $\alpha(0) = \beta(1) = e$. Provar que $\alpha * \beta \simeq \alpha \cdot \beta$ rel $\{0,1\}$. Provar que $\pi_1(G,e)$ é comutativo.

2) De exemplos de duas topologias em $\mathbf{R}$ não comparaveis entre si e que sejam maiores que a topologia usual de $\mathbf{R}$.

3) Sejam X e Y espaçõs topologicos, $x_0 \in X$ and $U \subset X \times Y$ aberto (na topologia produto) tal que $\{x_0\} \times Y \subset U$. Provar que se Y é compacto então existe um aberto $W \subset X$ tal que $x_0 \in W$ e $W \times Y \subset U$.

4) Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa, justificando a resposta.
Sejam X_α, $\alpha \in I$ uma familia de espaçõs topologicos conexos.

a) $\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha$ é conexo na topologia produto;
b) $\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha$ é conexo na topologia das caixas.

5) Sejam X e Y espaços topologicos e $F : X \to Y$. Prove que F é continua se e somente se para todo $A \subset X$, $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

1	2	3	4	5	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Julho 2016 - **Grupos de Lie**.

NOME:____ **RA:**______________**.**

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1) Mostre que o conjunto dos elementos $x \in \mathrm{SU}(n)$ de ordem finita é denso em $\mathrm{SU}(n)$. Mostre também que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $x \in \mathrm{SU}(n)$ cuja ordem é finita e maior que m.

2) Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado um subgrupo $H \subset G$ considere o conjunto $\mathfrak{h}_H \subset \mathfrak{g}$ formado pelas derivadas $\alpha'(0)$ das curvas diferenciáveis $\alpha(t) \in H$ com $\alpha(0) = 1$. Mostre que $\mathfrak{h}_H$ é uma subálgebra de Lie. Suponha que H é um subgrupo normal e que $\mathfrak{h}_H = \{0\}$ e mostre que $H \subset Z(G)$.

3) Sejam K um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ e $K \times M \to M$ uma ação diferenciável de K na variedade conexa M. Dado $x_0 \in M$ seja V_{x_0} o subespaço de $T_{x_0}M$ gerado pelas derivadas $\frac{d}{dt}e^{tX}(x_0)$, $X \in \mathfrak{k}$. Mostre que se $\dim V_{x_0} = \dim M$ e a ação é transitiva então M é compacta.

4) Para cada uma das afirmações a seguir diga se é verdadeira ou falsa, justificando a resposta.

a) Se G é um grupo de Lie conexo unimodular então todo grupo de Lie conexo H, localmente isomorfo a G, também é unimodular.
b) Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que se a álgebra derivada $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ coincide com $\mathfrak{g}$ então G é unimodular.
c) Se G e H grupos de Lie conexos localmente isomorfos (isto é, suas álgebras de Lie são isomorfas) e seus grupos fundamentais $\pi_1(G)$ e $\pi_1(H)$ são isomorfos então G e H são isomorfos.
d) Seja G um grupo de Lie conexo e denote por $\widetilde{G}$ seu recobrimento universal. Se $\widetilde{G}$ é compacto então o grupo fundamental de G é finito.

5) Dê exemplo de um grupo de Lie conexo G tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ mas que $Z(G)$ é infinito.