DM–IMECC–UNICAMP–Pós-graduação em Matemática
Exame de Qualificação de Mestrado – Análise no $\mathbb{R}^n$ 25/7/2016

• **Cada questão vale 2 pontos.**

**1.** Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$f(\mathbf{x}) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2), \qquad g(\mathbf{y}) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1),$

e $F = g \circ f$. Mostre que $F$ é invertível numa vizinhança de $\mathbf{0}$ e calcule a matriz jacobiana $(JF^{-1})(F(\mathbf{0}))$. ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{0} = (0, 0)$.)

**2.** Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1$ em um aberto $U$ do $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $Df(a) = 0$, $a \in U$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in B_\varepsilon(a)$.

**3.** Sejam $f, g$ funções de classe $C^1$ em um aberto do $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $g^{-1}(c) \neq \emptyset$ onde $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de $g$ ($\nabla g(x) \neq 0$ para todo $x \in g^{-1}(c)$) e $a \in g^{-1}(c)$ é um ponto de mínimo de $f|g^{-1}(c)$ ($f$ restrita a $g^{-1}(c)$) então $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

**4.** Seja $M$ uma $n$-variedade em $\mathbb{R}^{n+k}$. Mostre que se existem $k$ campos de vetores $v_1, \cdots, v_k$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ contínuos normais a $M$ ($v_j(p) \perp T_pM$ para todo $p \in M$, $j = 1, \cdots, k$) que são lineamente independentes em todo ponto de $M$ então $M$ é orientável.

**5. (a) (1 pt)**. Sejam $M$ uma $(k + l + 1)$-variedade compacta orientada em $\mathbb{R}^n$, com o $\partial M$ com a orientação induzida, se $\partial M \neq \emptyset$, e, $\omega$ e $\eta$ formas de classe $C^1$ de ordem $k$ e $l$, respectivamente, definidas numa vizinhança de $M$, e com o suporte de uma delas contido no interior de $M$ ($M - \partial M$). Mostre que $\int_M d\omega \wedge \eta = -(-1)^k \int_M \omega \wedge d\eta$.

**(b) (1 pt)**. Sejam $M$ uma 3-variedade em $\mathbb{R}^3$ compacta e orientada, com $\partial M$ não vazio e tendo a orientação induzida, e, $X$ e $Y$ campos vetoriais de classe $C^1$ definidos numa vizinhança de $M$. Mostre que

$$\int_{\mathrm{Int}M} \langle \mathrm{rot} X, Y \rangle = \int_{\partial M} \langle X \times Y, \nu \rangle dV + \int_{\mathrm{Int}M} \langle X, \mathrm{rot} Y \rangle,$$

onde $\nu$ é o campo unitário normal a $\partial M$ e apontando para fora de $M$.

*Bom Exame!*