EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

11 de janeiro de 2016

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 3 horas.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.

4. Escolha 4 das 5 questões, indicando-as claramente. Responda, mostrando seu argumento de forma clara e concisa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

5. Tranquilidade e Boa Sorte.

1. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de X, com densidade dada por

$$f_X(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma}{\beta^\gamma - \alpha^\gamma} x^{\gamma-1} I_{[\alpha,\beta]}(x), \quad 0 \leq \alpha < \beta, \, \gamma > 0.$$

a. [0.8] Encontre as estatísticas suficiente e minimal;

b. [0.8] Para $\alpha = 0$ e γ conhecido. Encontre um ENVUMV de β;

c. [0.9]Para $\alpha = 0$ e β conhecido. Encontre o estimador de γ pelo método dos momentos e denote este por $\widehat{\gamma}_M$. O estimador $\widehat{\gamma}_M$ é consistente? Justifique.

2. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X, com densidade dada por

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}, \, x \in \mathbb{R}, \, \theta > 0.$$

a. [0.8] Obtenha o limitante inferior de Cramér-Rao para a variância de um estimador não viciado de θ;

b. [0.9] Encontre o estimador não viciado de variãncia uniformemente mínima de $\tau(\theta) = \theta^2$;

c. [0.8] Determine o teste da razao de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta \neq 1$, ao nível de significância α.

3. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X, cuja distribuição é dada por

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \beta^\alpha I_{[\beta,\infty)}(x), \quad \alpha, \beta > 0,$$

com β conhecido e seja $F(y; \alpha, \beta)$ a função de distribuição acumulada de X.

a. [0.8] Determine o EMV de α e denote este por $\widehat{\alpha}$;

b. [0.8] Obtenha um teste UMP para testar $H_0 : \alpha = 1 \quad vs \quad H_1 : \alpha > 1$ com nível de significância de 5%;

c. [0.9] Para estimar $F(y; \alpha, \beta)$, para $y > \beta$, considere os estimadores

$$S_1 = F(y; \widehat{\alpha}, \beta) \quad e \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[\beta,y)}(X_i).$$

Encontre a distribuição assintótica de S_1 e S_2. Justifique sua resposta.

Sugestão: Considere a transformação $X = \beta e^Y$ e a v.a. $\alpha/\widehat{\alpha}$.

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatria de X, com densidade dada por

$$f_X(x;\theta) = \left(\frac{1+\theta x}{2}\right) I_{(-1,1)}(x)\,, \theta \in (-1,1).$$

a. [0.8] Obtenha o estimador de θ pelo método dos momentos;

b. [0.9] Determine a forma do teste mais poderoso de nível α para testar $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1/2$;

c. [0.8] Considere $n = 1$ e encontre o valor crítico no teste mais poderoso desenvolvido no item (b), de modo que $P(\text{Erro de tipo I}) = 0,05$. Qual o poder desse teste?

5. Seja $Y_1, ..., Y_n$ v.a. independentes, com função densidade de Y_j dada por

$$f(y_j|\theta) = \tfrac{c_j}{\theta} e^{-\frac{c_j}{\theta} y_j} I_{(0,\infty)}(y_j), \quad \theta > 0.$$

a. [0.8] Suponha que $c_1, ..., c_n$ são constantes positivas conhecidas e que a distribuição a priori de θ é a $\theta \sim IGamma(\alpha, \beta)$ (α e β conhecidos) dada por

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{1}{\theta^{\alpha+1}} e^{-1/(\beta\theta)} I_{(0,\infty)}(\theta),$$

que tem média dada por $E[\theta] = 1/[(\alpha-1)\beta]$, $\alpha > 1$. Encontre o estimador de Bayes de θ considerando a perda quadrática;

b. [0.8] Suponha que $c_j = \theta/(\alpha + \beta x_j)$, com x_j conhecido, $j = 1, ..., n$ (depende de parâmetros). Encontre a matriz de informação esperada de Fisher;

c. [0.9] Sob as condições em b), determine a estatística de Escore Q_E para testar as hipóteses $H_0 : \beta = 0$ versus $H_1 : \beta \neq 0$.

Exame de Qualificação (mestrado.2016) – Probabilidade

1. Seja $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}\}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Calcule $\liminf_{n\to\infty} A_n$ e $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

2.

(a) Define o que é uma sigma-algebra, e o que é a sigma-álgebra $\mathcal{F}_X$ gerada pela v.a. X. Prove que qualquer v.a. X é $\mathcal{F}_{g(X)}$ mensurável, onde a função Boreliana $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma bijeção.

(b) Define o que é a esperança condicional com relação a uma sigma-algebra. Formule e prove 3 propriedades (a sua escolha) da esperança condicional com relação a sigma-algebra.

3. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas (prove ou dê um contra-exemplo):

(a) se $X_n \to X$ em probabilidade, então $X_n - X \to 0$ em probabilidade;

(b) se $X_n \to X$ em distribuição, então $X_n - X \to 0$ em distribuição.

(c) se $X_n \to X$ em L_p, então $X_n \to X$ em probabilidade.

(d) se $X_n \to X$ em probabilidade, então $X_n \to X$ q.c.

4. As seguintes funções

(a) $\varphi(t) = e^{3it-t^2}$;

(b) $\varphi(t) = \cos(t + \frac{3\pi}{2})$;

(c) $\varphi(t) = 1 - |t|^{1/2}$;

(d) $\varphi(t) = \cos^2 t$;

(e) $\varphi(t) = \mathbf{1}\{t \geq 0\}$;

(f) $\varphi(t) = \cos t^3$;

(g) $\varphi(t) = e^{7it}$;

(h) $\varphi(t) = e^{e^{it}-1}$;

são funções características? (Obs.: caso sim, f.c. de que?; caso não, explique porquê.)

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes, X_n é uniforme no intervalo $[-\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n}]$. O que podemos dizer com relação à Lei Forte dos Grandes Números e o Teorema Central de Limite para esta sequência? Caso algum destes fatos se verifique, o formule explicitamente para a sequência em questão (especificando os parâmetros).