Exame de qualificação - mestrado

Julho 2015

1.(a) Se $A_n \to A$ e $B_n \to B$, é verdade que $A_n \cap B_n \to A \cap B$? Prove ou dê contra-exemplo.
(b) Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de Ω tal que $\Omega \in \mathcal{A}$ e se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Prove que $\mathcal{A}$ é uma álgebra.

2. Seja F f.d.a. tal que $F(b) = 1$ e $F(x) < 1$ para todo $x < b$. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. com f.d.a. F. Mostre que $\max(X_1, \ldots, X_n) \to b$ em distribuição, quando $n \to \infty$.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes, com

$$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = p_n, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n.$$

Dê exemplos de sequências $\{p_n\}$ tais que X_n:
(a) converge para 0 quase certamente;
(b) converge para 0 em L^2;
(c) converge para 0 quase certamente, mas não em L^2;
(d) converge para 0 em L^1, mas não quase certamente.

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes tais que X_n tem distribuição Uniforme em $[0, 2n]$, $n = 1, 2 \ldots$. Mostre que esta sequência satisfaz o Teorema Central do Limite (quais são os parâmetros?).

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. com $\mathbb{E}X_1 = 0$ e $\mathbb{E}(X_1^2) = 4$. Ache o limite (em que sentido?) da sequência $Y_1, Y_2, \ldots$, onde

$$Y_n = \frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{(X_1^2 + \ldots + X_n^2)}.$$