Exame de Qualificação de Probabilidade
Mestrado em Estatística
09 de agosto de 2013

Instruções:

1. A prova é composta de 5 questões que devem ser respondidas de forma clara e completa.
2. A duração da prova é de 4 horas.
3. Não é permitido consulta.
4. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

Formulário:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} (1-x)^{-1} & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \infty & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Para $p \in (0,1)$, temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, p\, (1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, p\, (1-p)^{n-1} = \frac{2-p}{p^2}$.

Para $\lambda > 0$, temos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} \sim \frac{n^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ quando $n \to \infty$.

Para $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$.

$\Gamma(n+1) = n!$ para $n \geq 0$ inteiro.

1. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos em um espaço de probabilidade tais que $A_n \uparrow A$ quando $n \to \infty$, ou seja,

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ para todo } n \geq 1 \quad \text{e} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Suponha que B é um evento independente de A_n para todo $n \geq 1$. Prove que A e B são independentes.

2. Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no quadrado $(0,1) \times (0,1)$. Defina $Z = XY$.

   (a) Mostre que a densidade de Z é dada por

   $$f_Z(z) = \begin{cases} -\log z & \text{se } 0 < z < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (b) Determine $E(X \mid Z = z)$ para $0 < z < 1$.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

   (a) Qual a probabilidade de que a seguida '10' seja observada infinitas vezes na sequência?

   (b) Seja N o número de 0's e 1's até que apareça a seguida '10' pela primeira vez. Determine o valor esperado de N.

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média μ e variância σ^2 finita e positiva. Para $n \geq 1$, defina

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, X_k.$$

Mostre que $Y_n \to \mu$ em probabilidade quando $n \to \infty$.

5. Seja $\{U_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $(0,1)$, e defina

$$Y_n = \Big(\prod_{i=1}^{n} U_i\Big)^{-1/n}.$$

   (a) Mostre que a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ converge quase certamente para uma constante c e encontre o valor de c.

   (b) Prove que $\sqrt{n}\,(Y_n - c)$ converge em distribuição, apresentando a distribuição limite.