Exame de Qualificação-Inferência Avançada (Doutorado 2012)*

1. A função densidade de probabilidade de X dado $\{\Theta = \theta\}$ é $\exp\{-|x-\theta|/2\}$, $\theta \in R$ e a densidade a priori de Θ é $\exp\{-|\theta-\eta|/2\}$, $\eta \in R$ fixo. Seja o espaço de ações R e considere a perda quadrática. Exiba, justificando, a regra formal e Bayes. Sugestão: Considere separadamente dois casos $a)x \leq \eta$ e $b)x > \eta$

2. Suponha que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ seja uma amostra casual simples de $X \sim Beta(\mu, 1)$, $\mu \in (0, \infty)$ e $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ seja uma amostra casual simples de $Y \sim Beta(\theta, 1)$, $\theta \in (0, \infty)$. Assuma que X e Y sejam independentes.

   (a) Encontre o Teste da Razão de Verossimilhança para $H_0 : \theta = \mu$ versus $\theta \neq \mu$.

   (b) Mostre que o teste do item anterior pode ser baseado na estatística

   $$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} log(X_i)}{\sum_{i=1}^{n} log(X_i) + \sum_{j=1}^{m} log(Y_j)}$$

   (c) Ache a distribuição de T sob H_0 e com ela esboce o procedimento do teste de tamanho α.

3. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ amostra casual simples de $X \sim Poisson(\theta), \theta \in (0, +\infty)$,

   (a) Encontre o estimador de maxima verossimilhança de $exp(-3\theta)$

   (b) faça $n = 1$ em (a). Encontre a variância do estimador e compara com o limite inferior de Cramer-Rao.

*23-02-2012

Exame de Qualificação (doutorado.2012, probabilidade)

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e sejam P, Q duas medidas de probabilidade neste espaço. Prove que

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = Q(A)\}$$

é um λ-sistema. Mostre (apresentando um contra-exemplo) que $\mathcal{L}$ não precisa ser, necessariamente, uma σ-álgebra.

2. Define, o que significa que a família $(Y_n, n \geq 1)$ é uniformemente integrável. Quais condições suficientes para a integrabilidade uniforme você pode apresentar?

Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots$ v.a. independentes, e suponha que existe uma constante $C \in (0, \infty)$ tal que $\mathbb{E}X_k^2 \leq C$ para todos $k \geq 1$. Denote $Y_n = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$. Mostre que $(Y_n, n \geq 1)$ é uniformemente integrável.

3. Dê exemplos de sequências de v.a. $(X_n, n \geq 1)$ que satisfazem as seguintes condições (considere cada item separadamente)

(a) X_n converge para 0 em L^3 mas não converge em L^p para $p > 3$;

(b) $X_n \geq 0$ para todo n, e $\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} X_n < \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$;

(c) X_n converge para 0 em L^p para qualquer $p > 0$, mas não converge q.c.