Nome:

R.A.:

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

Exame de Inferência, Data: 12/01/2011

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **O exame tem duração de quatro horas.**
- **Numere e identifique cada folha utilizada.**
- **Não é permitido consulta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Resolva (4) das (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.**

Questão	1	2	3	4	5

- **Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.**
- **Escreva de maneira clara e organizada.**
- **As questões têm a mesma pontuação.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique suas respostas.**
- **Todos os resultados vistos em classe ou desenvolvidos nas listas de exercícios podem ser utilizados, a menos que se mencione o contrário.**
- **Resolva o teste, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**

Tranquilidade e faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \theta^2 x^{\theta^2-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

Responda os itens:

a) Obtenha o estimador pelo método dos momentos de θ (3 pontos) .

b) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ (7 pontos).

c) Calcule a esperança e a variância (exatas) do estimador obtido no item b) (10 pontos).

d) Obtenha a estatística do teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ e, com base nela, proponha um teste **exato**, com nível de significância α, para as hipóteses em questão (10 pontos).

2. Responda os itens:

a) Seja X uma única observação de $f_X(x;\theta) = \theta \mathbb{1}_{\{0\}}(x) + \theta^2 \mathbb{1}_{\{1\}}(x) + (1-\theta-\theta^2)\mathbb{1}_{\{2\}}(x)$, $\theta \in (0, 1/2)$. A estatística X é completa? Justifique sua resposta (10 pontos).

b) Seja X uma única observação de $f_X(x;\theta) = (2\theta x + 1 - \theta)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta \in [-1, 1]$. Encontre o teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta \neq 0$, a um nível de significância de α (10 pontos).

c) Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \theta(1 + x)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0.$$

Obtenha um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$, com nível de significância α (10 pontos).

3. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

e considere $\tau(\theta) = P(X \geq x)$, para algum x fixo. Responda os itens:

a) Encontre um intervalo de confiança assintótico para para $\tau(\theta)$ (10 pontos).

b) Encontre o ENVUM de $\tau(\theta)$ (20 pontos).

4. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim U(\theta_1, \theta_2), 0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$. Denote $Y_1 = \min(X_1, ..., X_n)$ e $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Responda os itens:

   a) Considerando θ_1 conhecido, encontre uma estatística suficiente e completa e obtenha o ENVUM de θ_2 (10 pontos).

   b) Considerando θ_2 conhecido, encontre uma estatística suficiente e completa e obtenha o ENVUM de θ_1 (10 pontos).

   c) Considerando (θ_1, θ_2) desconhecidos, prove que $\boldsymbol{T} = (Y_1, Y_n)$ é uma estatística suficiente e encontre os ENVUM's de θ_1 e θ_2. OBS: Assuma que $\boldsymbol{T}$ é uma estatística completa (10 pontos).

OBS: Lembre-se de que, neste caso ($F_W(w)$ denota a função de distribuição da variável aleatória W no ponto w),

$$F_{Y_1}(y) = \{1 - [1 - F_X(y)]^n\} \mathbb{1}_{(\theta_1, \theta_2)}(y) + \mathbb{1}_{[\theta_2, \infty)}(y)$$

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n \mathbb{1}_{(\theta_1, \theta_2)}(y) + \mathbb{1}_{[\theta_2, \infty)}(y)$$

Além disso

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_a^\theta g(y)dy = g(\theta) \text{ e } \frac{\partial}{\partial \theta} \int_\theta^a g(y)dy = -g(\theta) \text{ , em que } a \text{ é uma constante}$$

5. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, tal que

$$f_X(x|\theta) = \frac{\theta^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \theta > 0, r > 0$$

Assuma uma distribuição a priori ($\pi(\theta)$), $\theta \sim Gama(\alpha, 1/\beta)$, com r, α e β **conhecidos**. Responda os itens.

   a) Determine a distribuição a posteriori de θ e obtenha o estimador de Bayes, sob perda quadrática, de θ (10 pontos).

   b) Obtenha o estimador de Bayes, sob perda quadrática, de $\tau(\theta) = \text{Var}(X|\theta)$ (5 pontos).

c) Obtenha um intervalo de credibilidade de $\gamma\%$ para θ (5 pontos).

d) Para $r = 1$, obtenha o estimador de Bayes, sob perda quadrática de $\tau(\theta) = P(X \leq x)$, para algum x fixado (10 pontos).

Formulário

1. Se $X \sim Beta(a, b)$, então $f_X(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), a > 0, b > 0$. Além disso $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1), y > 0$.

2. Se $X \sim Gama(r, \lambda), r > 0, \lambda > 0$, então $f_X(x; r, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(r)\lambda^r} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Além disso $\int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx = \Gamma(r)$.

3. Se $X \sim \chi^2_{(r)}$, então $f_X(x; r) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} x^{r/2-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), r > 0$.

4. Se $\sum_{i=0}^\infty \theta^i c_i = 0, \forall\, \theta$, então $c_i = 0, \forall\, i$.

Nome:

R.A.:

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

Exame de Inferência, Data: 17/02/2011

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **O exame tem duração de quatro horas.**
- **Numere e identifique cada folha utilizada.**
- **Não é permitido consulta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Resolva (4) das (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.**

Questão	1	2	3	4	5

- **Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.**
- **Escreva de maneira clara e organizada.**
- **As questões têm a mesma pontuação.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique suas respostas.**
- **Todos os resultados vistos em classe ou desenvolvidos nas listas de exercícios podem ser utilizados, a menos que se mencione o contrário.**
- **Resolva o teste, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**

Tranquilidade e faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X em que

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x), \theta > 0$$

   a) Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ (3 pontos).
   b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ. Calcule sua esperança e variância exatas (10 pontos).
   c) Obtenha um intervalo de confiança exato de $\gamma\%$ para θ (7 pontos).
   d) Obtenha um teste exato para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta > 1$, ao nível de significância de α (10 pontos).

2. Responda os itens

   a) Seja X uma única observação da seguinte f.d.p.

$$f(x;\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \mathbb{1}_{\{-1,0,1\}}(x), \theta \in [0,1].$$

   X é uma estatística completa? Justifique adequadamente(5 pontos)

   b) Seja X uma única observação da seguinte f.d.p

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{\lambda\Gamma(1/\theta)2^{1+1/\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^{-\theta}|x|^{\theta}\right\} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x), \theta > 0$$

   em que

$$\lambda^2 = 2^{-2/\theta}\frac{\Gamma(1/\theta)}{\Gamma(3/\theta)}.$$

   Encontre um teste mais poderoso para testar $H_0 : \theta = 2$ vs $H_1 : \theta = 1$, ao nível de significância de α (15 pontos).

c) Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

Obtenha um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$, ao nível de significância de α (10 pontos).

3. Sejam $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_m$ duas amostras aleatórias independentes, respectivamente de $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $\mu_i \in (-\infty, \infty), i = 1, 2, \sigma^2 > 0$ (conhecido).

a) Encontre o ENVUM de $\mu_1 - \mu_2$ (10 pontos) .

b) Encontre a estatística do teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ e, com base nela, proponha um teste exato para testar as referidas hipóteses à um nível de significância de α (20 pontos).

4. Responda os itens:

a) Seja $X_1, .., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \theta(1+\theta)x^{\theta-1}(1-x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

i) Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ (6 pontos).

ii) Encontre a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança de θ, especificando os parâmetros dessa distribuição (9 pontos).

b) Seja $X_1, .., X_n$ uma amostra aleatória de X, em que

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{8}(x-\theta)^2\right\} \mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x), \theta > 0$$

i) Obtenha um intervalo de confiança assintótico para θ, com coeficiente de confiança de aproximadamente $\gamma\%$ (6 pontos).

ii) Proponha um teste, com base na amostra aleatória, para testar as hipóteses $H_0 : \theta = 2$ vs $H_1 : \theta > 2$, à um nível de significância de α (9 pontos).

5. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X|\mu \sim N(\mu, 1), \mu \in (-\infty, \infty)$. Considere uma distribuição a priori $\pi(\mu)$, $\mu \sim N(0, \tau), \tau > 0$, conhecido. Responda os itens

   a) Encontre a distribuição a posteriori de μ e o respectivo estimador de Bayes de μ, sob perda quadrática (15 pontos).

   b) Obtenha um intervalo de credibilidade de $\gamma\%$ para μ (5 pontos).

   c) Obtenha o estimador de Bayes para μ^2, sob perda quadrática (10 pontos).

Formulário

1. Se $X \sim Beta(a, b)$, então $f_X(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), a > 0, b > 0$. Além disso $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1), y > 0$.

2. Se $X \sim Gama(r, \lambda), r > 0, \lambda > 0$, então $f_X(x; r, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(r)\lambda^r} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Além disso $\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx = \Gamma(r)$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 > 0$, então
$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x)$.

Exame de Qualificação de Probabilidade

Mestrado em Estatística
10 de janeiro de 2011.

- A prova consiste de 5 questões que devem ser respondidas de forma mais completa possível.
- Inicie cada questão em uma folha separada. Escreva somente em um lado da folha.
- Coloque no alto de cada folha o número da questão sendo respondida e seu nome.

1. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que

$$\begin{aligned} P(X_k = 1) &= P(X_k = -1) = \frac{1 - 2^{-k}}{2} \\ P(X_k = 2^k) &= P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Prove que vale o Teorema Central do Limite.

2. (a) Seja F uma função de distribuição contínua, e sejam X e Y v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com distribuição F. Prove que $\mathbb{E}(F(X)) = 1/2$. Prove que $\mathbb{P}[X \leq Y] = 1/2$.

   (b) Sejam F e G funções de distribuições contínuas e suponha que X tem distribução F e Z tem distribuição G. Mostre que $\mathbb{E}(F(Z)) + \mathbb{E}(G(X)) = 1$. Dica: Interprete as esperanças como probabilidades de eventos.

3. Sejam X_n v.a.'s independentes com distribuição de Poisson com média a_n e $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Prove que se $a_n \to \infty$ então $S_n/\mathbb{E}(S_n) \to 1$ em probabilidade.

4. Sejam $U_1, U_2, \ldots$ v.a.'s independenes $U(0,1)$. Defina uma v.a. X por

$$X + 1 \; = \; \min\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i < e^{-\lambda}\}, \quad \prod_{i=1}^{0} U_i = 1.$$

Mostre que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

5. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

   (a) Dizemos que dois eventos A, $B \in \mathcal{A}$ são equivalentes se $\mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0$. Mostre que A e B são equivalentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$.

   (b) Sejam A, B e C três eventos disjuntos tais que

$$\mathbb{P}(A) = 0.6, \quad \mathbb{P}(B) = 0.3, \quad \mathbb{P}(C) = 0.1.$$

   Calcule a probabilidade de todos os eventos de $\sigma(A, B, C) =$ menor σ-algebra contendo os eventos A, B e C.

Exame de Qualificação de Probabilidade

Mestrado em Estatística
15 de fevereiro de 2011.

1. A prova consiste de 5 questões que devem ser respondidas de forma mais completa possível.
2. Não é permitido consulta
3. Inicie cada questão em uma folha separada. Escreva somente em um lado da folha.
4. Coloque no alto de cada folha o número da questão sendo respondida e seu nome.

1. Seja o vetor aleatório (X, Y) uniformemente distribuído nos lados do quadrilátero com vértices $(0, -1), (1, 0), (0, 1), (-1, 0)$.

   (a) Seja A um boreliano em $\mathbb{R}^2$, escreva $\mathbb{P}((X, Y) \in A)$.

   (b) Calcule as distribuições marginais de X e Y.

   (c) Calcule as distribuições condicionais de X dado $Y = y$ e de Y dado $X = x$.

   (d) Calcule $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$. É verdade que X e Y são independentes?

2. Seja U uma v.a. Uniforme $(0, 1)$ e seja $q \in (0, 1)$. Mostre que

$$X = 1 + \lfloor \ln U / \ln q \rfloor$$

   tem distribuição geométrica.
   Nota: $\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro contido em x.

3. (a) Seja $\{X_n\}$ uma sequência monótona de v.a.'s. Mostre que se $X_n \to X$ em probabilidade quando $n \to \infty$ então $X_n \to X$ quase certamente $n \to \infty$ (Pense em subsequências).

   (b) Seja $\{Z_n\}$ uma sequência de v.a's iid com distribuição comum $F(z)$ tal que $F(1) = 1$ e $F(z) < 1$ para todo $z < 1$. Prove que

$$\max\{Z_1, \ldots, Z_n\} \to 1, \quad \text{quase certamente quando } n \to \infty.$$

4. Seja $\{X_n\}$ uma sequência de v.a's iid com densidade comum

$$f(x) = |x|^{-3}, \quad |x| > 1.$$

   (a) Mostre que não vale o TCL de Lindeberg.

   (b) Mostre que apesar de (a) ainda temos

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

   Dica: Aplique CLT para $Y_n = X_n I_{\{|X_n| \leq \sqrt{n}\}}$ (não esqueça de verificar as condições) e use Borel-Cantelli. Alguns resultados uteis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \log(j)}{n \log n - n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n \log n - n}{n \log n} = 1.$$

5. Suponha que $\{X_n, n \geq 1\}$ sejam v.a's independentes e suponha que $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$. Escolha σ_n^2 tal que

$$\frac{\max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n^2\}}{s_n^2} \nrightarrow 0 \quad (\textbf{não} \text{ converge a zero) quando } n \to \infty$$

onde $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$. Use funções características para mostrar que

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{s_n} \sim N(0,1).$$

Exame de qualificação (agosto/2011, mestrado)
Probabilidade

- A prova consiste de 5 questões que devem ser respondidas de forma mais completa possível.
- Inicie cada questão em uma folha separada. Escreva somente em um lado da folha.
- Coloque no alto de cada folha o número da questão sendo respondida e seu nome.

1. Seja $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}\}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Calcule $\liminf_{n\to\infty} A_n$ e $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

2. Sejam $X, X', X_1, \ldots, X_n$ v.a. independentes com a distribuição Exponencial, com parâmetros $\lambda, \lambda', \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respetivamente.

(a) Calcule $\mathbf{P}[X < X']$.

(b) Ache a distribuição de v.a. $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(c) Calcule $\mathbf{P}[X_1 = Y]$ (sendo Y a v.a. do item (b)).

3. Escreva, o que significa que o Teorema Central de Limite vale para a sequência $(X_n, n \geq 1)$. Quais condições suficientes para o TCL você conhece (tem que *formular* estas condições, não basta só *nomear*)?

Repita para as Leis Fraca e Forte de G.N. no lugar de TCL.

4. Sejam $(X_n, n \geq 1)$ v.a. independentes, tais que $\mathbf{P}[X_n = n^\alpha] = \mathbf{P}[X_n = -n^\alpha] = 1/2$, onde $\alpha \in [0, 1/2)$ é um parâmetro. Seja $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. O que pode ser dito sobre a convergência $\bar{X}_n \to 0$ em probabilidade, q.c., em L^2, em L^1?

5. Entre as proposições a seguir, identifique as verdadeiras e as falsas. Prove as proposições verdadeiras, e dê contra-exemplos para as proposições falsas.

(a) $X_n \geq 0$ q.c., e $X_n \xrightarrow{q.c.} X$. Então $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.

(b) Se $X_n \xrightarrow{L^3} X$, então $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

(c) Se $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ então $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

(d) $X_n \xrightarrow{q.c.} X$, $X_{n+1}(\omega) \leq X_n(\omega)$ q.c. para todo n, e $\mathbb{E}X_5 < \infty$. Então, $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.

(e) $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ e $|X_n| \leq 3$ q.c. para todo n. Então, para qualquer parâmetro $a > 0$, temos $\mathbb{E}X_n^a \to \mathbb{E}X^a$.

(f) Se X_n, Y_n são independentes para cada n, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$, então $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,2)$.

(g) Se $X_n \xrightarrow{L^2} 2$, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$, então $\frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \frac{1}{4})$.

(h) Se $(X_n, n \geq 1)$ são v.a. independentes e o Teorema Central de Limite vale para esta sequência, então a Lei Forte dos Grandes Números vale também.

Obs.: enuncie os teoremas utilizados (não é preciso prova-los). Seja mais específico na aplicação destes teoremas (mau exemplo: *esta proposição vale por causa do teorema de convergência dominada*; bom exemplo: *esta proposição vale porque a sequência de v.a.* $(|X_n|/2, n = 1, 2, 3, \ldots)$ *satisfaz as hipóteses do teorema de convergência dominada*).

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

21 de dezembro de 2011

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique com a sua senha cada folha utilizada.

4. Resolva 4 das questões. Coloque um círculo na questão não resolvida. Os pesos de cada ítem estão indicados entre colchetes no início de cada ítem.

5. É preciso devolver apenas esta página de rosto. Pode levar a outra folha.

6. Tranquilidade e Boa Sorte.

SENHA: ······

Questão não resolvida: 1 2 3 4 5

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA - PROVA DE INFERÊNCIA - 21 de dezembro de 2011

1. Seja $X_1, \cdots, X_{n+2}$ uma amostra aleatória de tamanho $(n+2)$ de uma distribuição de Poisson de parâmetro λ, $\lambda > 0$. Responda os itens seguintes baseando-se apenas nas informações dadas pelas primeiras n observações.
[12] a. Encontre um estimador não viciado uniformemente de variância mínima (ENVUVM) para a probabilidade de que os valores amostrais da $(n+1)-$ésima e da $(n+2)-$ésima observações sejam iguais.
[5] b. Discuta se sua variância atinge o limite inferior de Cramér-Rao e se existe outro ENVUVM.
[8] c. Dê o limite inferior de confiança do intervalo de confiança unilateral mais acurado de λ, tal que tenha coeficiente de confiança igual a $100(1-\alpha)\%$.

2. Considere $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_m$ amostras aleatórias (mutuamente independentes) de $X \sim$ gama(r, λ) e $Y \sim$ gama(r, α), com r conhecido, $E(X) = r\lambda$ e $E(Y) = r\alpha$. Responda os itens.
[8] a. Considerando apenas a primeira amostra, obtenha o estimador de máxima verossimilhança de $\frac{1}{\lambda}$.
[8] b. Considerando apenas a primeira amostra, obtenha um intervalo de confiança assintótico, de coeficiente de confiança γ, para λ^2.
[9] c. Encontre o teste da razão de verossimilhanças, de tamanho α, para testar $H_0 : \lambda = \alpha$ vs $H_1 : \lambda \neq \alpha$.

3. Considere que a distribuição do tempo de falha seja uma mistura de duas distribuições exponenciais com médias conhecidas e iguais a $1,0$ e $0,5$ e com taxa de mistura $\theta \in [0,1]$, isto é, com densidade dada por:

$$f(x;\theta) = \left[\theta e^{-x} + (1-\theta)2e^{-2x}\right] I_{(0,\infty)}(x).$$

Para uma única observação.
[10] a. Verifique se existe um teste uniformemente mais poderoso de nível α para as hipóteses:

$$H_0 : \theta = 1/2 \quad vs \quad H_a : \theta > 1/2.$$

Se existir dê o teste para um nível de significância $0,05$, e dê o valor-p do teste quando o valor observado for igual a 2.
[8] b. Verifique se existe um teste uniformemente mais poderoso de nível α para as hipóteses:

$$H_0 : \theta = 1/2 \quad vs \quad H_a : \theta \neq 1/2.$$

Se existir dê o teste para um nível de significância $0,05$.
[7] c. Dê o estimador de máxima verossimilhança de θ.

4. Seja uma amostra de tamanho um da densidade:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x),$$

onde $\lambda > 0$. Considere que a distribuição a priori de λ seja a distribuição Gama , com hyper-parâmetros α e β positivos, isto é com densidade:

$$f(\lambda;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{(\alpha-1)} \, e^{-\beta\lambda} \, I_{(0,\infty)}(\lambda),$$

Considere a função perda dada por $L(d,\lambda) = I(|d-\lambda| > 1)$.
[9] a. Calcule a função risco quando utilizamos $\delta(X) = a/X$, com $a > 0$, como estimador de λ.
[9] b. Dê o valor esperado da função perda utilizando a distribuição a posteriori de λ.
[7] c. Dê um intervalo de credibilidade $100\gamma\%$ de mais alta densidade de λ.

5. Considere $(X_i, Y_i),\ i = 1, \cdots, n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição bivariada definida por: X_i tem distribuição exponencial com média $\theta, \theta > 0$, e a distribuição condicional da variável aletória Y_i, dado que $X_i = x_i$ é uma exponencial com taxa de falha βx_i, $\beta > 0$.
[7] a. Dê uma estatística completa.
[18] b. Utilize um dos três testes, Wald, Razão de Verossimilhança ou Escore, para dar a a região crítica de um teste de tamanho α para testar a hipótese nula $H_0 : \theta = \beta$, contra a hipótese alternativa $H_a : \theta \neq \beta$