Nome

RA

Assinatura

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

EXAME de INFERÊNCIA

07 de Janeiro de 2010

Instruções

1. A duração do exame é de 4 horas.

2. Não é permitida consulta.

3. Resolva quatro (4) das cinco (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.

Questão	1	2	3	4	5

4. Cada questão tem a mesma pontuação.

5. Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.

6. Escreva de maneira clara e organizada.

7. **Justifique** suas respostas.

8. Numere e identifique cada folha utilizada.

Tranquilidade e Bom trabalho

Questão 1

Seja X uma única observação da densidade $f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ onde $\theta > 0$

(a) (*8 ptos*) Encontre uma quantidade pivotal e a use para construir um IC para θ.

(b) (*9 ptos*) Encontre um IC melhor do que $(Y/2, Y)$, dado que $Y = -\log(X)$

(c) (*8 ptos*) Existe um teste UMP de tamanho α para testar

$$H_0 : \theta \geq 2 \text{ vs } H_a : \theta < 2 \text{ ?}$$

Se existir tal teste determine-o.

Questão 2

Suponha que n peças de equipamentos são submetidas a teste e que suas taxas de falhas $X_1, \ldots, X_n$ formam uma a.a. da densidade exponencial com valor esperado $1/\theta$. Queremos estimar a probabilidade de falha anticipada, isto é, $\tau(\theta) = P(X_1 \leq k)$ para algum k fixo.

(a) (*15 ptos*) Encontre o ENVUMV para $\tau(\theta)$.

(b) (*10 ptos*) Encontre um intervalo de confiança assintótico para $\tau(\theta)$.

Obs. $\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \sim Beta(1, n-1)$

Questão 3

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ duas amostras aleatórias independentes das densidades $N(\mu_x, \sigma^2)$ e $N(\mu_y, \sigma^2)$, respectivamente.

(a) (*8 ptos*) Encontre o ENVUMV para $\mu_y - \mu_x$.

(b) (*17 ptos*) Deseja-se testar a seguinte hipótese:

$$H_0 : \mu_y = \mu_x \text{ vs } H_a : \mu_y \neq \mu_x.$$

Encontre o teste de Razão de Verossimilhança Generalizado de tamanho α e sua distribuição.

Questão 4

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da densidade $N(\theta, \theta^2)$ com $\theta > 0$. Para este modelo cS é um estimador não viciado para θ, onde

$$c = \frac{\sqrt{n-1}\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

(a) (*6 ptos*) Demonstre que para toda constante a, o estimador $T_a = a\bar{X} + (1-a)(cS)$ é um estimador não viciado para θ.

(b) (*9 ptos*) Encontre o valor de a que produz o estimador T_a com menor variância.

(c) (*10 ptos*) A estatística $(\bar{X}, S^2)$ é suficiente e completa?

Questão 5

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da densidade Gamma$(p, 1/\theta)$ com p conhecido, isto é,

$$f(x) = \frac{\theta^{-p}}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x/\theta}$$

(a) (*8 ptos*) Seja $p = 1$. Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_a : \theta = \theta_1$, com $\theta_1 > \theta_0$.

(b) (*9 ptos*) Encontre um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_a : \theta > \theta_0$

(c) (*8 ptos*) Encontre o estimador de Bayes, com $p = 1$, supondo perda quadrática para θ e assumindo uma densidade a priori $\theta \sim$ Gamma(α, β).

Nome

RA

Assinatura

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

EXAME de INFERÊNCIA

25 de Fevereiro de 2010

Instruções

1. A duração do exame é de 4 horas.
2. Não é permitida consulta.
3. Resolva quatro (4) das cinco (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.

Questão	1	2	3	4	5

4. Cada questão tem a mesma pontuação.
5. Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.
6. Escreva de maneira clara e organizada.
7. **Justifique** suas respostas.
8. Numere e identifique cada folha utilizada.

Tranquilidade e Bom trabalho

Questão 1

(a) (*6 ptos*) Seja X uma única observação da densidade

$$f(x,\theta) = \frac{e^{(x-\theta)}}{[1+e^{(x-\theta)}]^2}, \quad \theta \in R, \quad x \in R.$$

Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar,

$$H_0 : \theta = 0 \text{ vs } H_a : \theta = 1.$$

(b) (*7 ptos*) O teste encontrado em (a) é UMP de tamanho α para testar

$$H_0 : \theta \leq 0 \text{ vs } H_a : \theta > 0 \ ?$$

(c) (*12 ptos*) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade $f(x,\theta) = 2x/\theta^2$ onde $0 < x < \theta$. Encontre um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ exato para θ.

Questão 2

Assuma que (N_1, N_2, N_3) tenha distribuição multinomial com tamanho de amostra n (≥ 2) e vetor de probabilidades (p_1, p_2, p_3).

(a) (*7 ptos*) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $\tau = p_1 p_2$.

(b) (*8 ptos*) O estimador encontrado em (a) é ENVUMV? Se não, encontre-o.

(c) (*7 ptos*) Seja $0 < \theta < 1$. Encontre o teste de RVG para testar

$$H_0 : p_1 = \theta, \ \ p_2 = 2\theta(1-\theta), \ \ p_3 = (1-\theta)^2$$

versus a hipótese alternativa H_a: não se cumpre H_0.

(d) (*3 ptos*) Qual é a distribuição assintótica do teste encontrado em (c)?

Questão 3

Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes tais que $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$, onde $\beta \in R$ e os x_i são números conhecidos.

(a) (*5 ptos*) Encontre estatísticas conjuntamente suficientes para (β, σ^2).

(b) (*6 ptos*) Encontre os ENVUMV para β e σ^2.

(c) (*6 ptos*) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de β e σ^2.

(d) (*8 ptos*) Suponha σ^2 conhecido. Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar

$$H_0 : \beta = 0 \text{ vs } H_a : \beta = \beta_0$$

com $\beta_0 > 0$ especificado.

Questão 4

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade,

$$f(x, \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \theta > 0.$$

(a) (*6 ptos*) Encontre um estimador de momentos para θ.

(b) (*6 ptos*) Determine a distribuição assintótica do estimador encontrado em (a) especificando os parámetros da distribuição.

(c) (*7 ptos*) Determine a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança de θ especificando os parámetros da distribuição.

(d) (*6 ptos*) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $(2\theta + 1)/(1 + \theta^2)$.

Questão 5 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma distribuição geométrica com função de probabilidade

$$f(x|\theta) = (1 - \theta)^x \theta, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

e $\theta \in (0, 1)$ desconhecido. Suponha que θ tenha distribuição priori $Beta(\alpha, \beta)$

a) (*7 ptos*). Encontre o estimador de Bayes de θ sob a perda quadrática.

b) (*5 ptos*). O estimador encontrado no item a) é viesado?

c) (*5 ptos*). O estimador encontrado no item a) é consistente?

d) (*8 ptos*). Encontre o estimador de Bayes de $(1 - \theta)/\theta^2$ sob a perda quadrática.

Exame de quailificação

Probabilidade, Janeiro 2010

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie cada questão em uma nova folha. Use só um lado de folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*
- *Tranquilidade e bom trabalho!*

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade. Para $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots$, mostre que se

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A,$$

então $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$, onde

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade e seja X uma v.a. positiva com $0 < \mathbb{E}_{\mathbf{P}} X < \infty$. Mostre (enunciando sem demonstrar os resultados utilizados) que:

(a) se, para $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{Q}(A) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(X\mathbf{1}_A)}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}} X},$$

então $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ é um espaço de probabilidade;

(b) se $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma v.a. então

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} Y = \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(XY)}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}} X}.$$

3. Sejam X e Y v.a. em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra contida em $\mathcal{F}$.

(a) Dê as definições de $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$ e $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

(b) Mostre que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)] = \mathbb{E}X$.

4. (a) Enuncie e prove o lema de Borel-Cantelli.
(b) Dê um exemplo de uma sequência de v.a. i.i.d. que não satisfaz lei forte dos grandes números (justifique!).

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. Uniformes $(0, a)$. Mostre que para todo $a > 0$ temos que $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade, mas não quase certamente.

Exame de Qualificação de Probabilidade

Mestrado em Estatística
25 de fevereiro de 2010.

1. A prova consiste de 5 questões que devem ser respondidas de forma mais completa possível.
2. Não é permitido consulta
3. Inicie cada questão em uma folha separada. Escreva somente em um lado da folha.
4. Coloque no alto de cada folha o número da questão sendo respondida e seu nome.

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas com distribuição comum Cauchy, isto é, sua densidade comum é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

e sua função característica

$$\phi(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty.$$

(i) Qual a distribuição da média amostral $\bar{X}_n = (1/n)(X_1 + \ldots + X_n)$? Defina as variáveis

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sqrt{n}} \;\; e \;\; Z_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n^2}$$

(ii) Examine as convergências em distribuição e em probabilidade das sequências $(Y_n)_{n>0}$ e $(Z_n)_{n>0}$.

2. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s iid $U(0,1)$. Defina

$$U_n = \min_{1 \le i \le n} X_i \quad \text{e} \quad V_n = \max_{1 \le i \le n} X_i.$$

(a) Mostre que o vetor $(nU_n, n(1-V_n))$ converge em distribuição e ache a distribuição limite.
(b) Seja $R_n = V_n - U_n$. Ache a distribuição assintótica de $n(1-R_n)$ e mostre que $R_n \to 1$ em probabilidade.

3. Considere o triângulo com vértices $(-1,0), (1,0), (0,1)$ e seja (X,Y) um vetor aleatório uniformemente distribuído neste triângulo. Ache $\mathbb{E}(X+Y)$.

4. Se $\{B_k, 1 \le k \le n\}$ são eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tais que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) > n-1$$

então

$$\mathbb{P}\left(\cap_{k=1}^n B_k\right) > 0.$$

5. Sejam $U_1, U_2, \ldots$ v.a's independentes tais que $U_k \sim U(-a_k, a_k)$. Mostre que se existe $M > 0$ tal que $|a_k| \le M$ mas $\sum a_k^2 = \infty$ então vale a condição de Lindeberg.