Álgebra Comutativa-MM427 - 1S 2009 - Exame de Qualificação

Nome: ______________________________ RA: __________ 17/07/2009

Em todas as questões a palavra "anel" significa anel comutativo com identidade não nula. Todo módulo é um módulo (unitário) sobre um anel. Sistemas multiplicativos não contém o zero. Escolha questões de modo que o total de pontos possíveis seja 100. Respostas sem justificativas não serão consideradas. Bom trabalho!

1. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) (05pts) Se $A \subseteq B$ é uma extensão de anéis, então $\dim_{Kr}(A) \leq \dim_{Kr}(B)$.
   (b) (05pts) Todo módulo livre é injetivo.
   (c) (05pts) Um ideal primo P é minimal no conjunto dos ideais primos contendo um ideal dado I se, e somente se, $\mathrm{alt}(P/I) = 0$ (aqui alt é a altura de um ideal).
   (d) (05pts) Se U, V, W são A-módulos com $U \neq \{0\}$ e $U \otimes_A V$ é isomorfo a $U \otimes_A W$, então V é isomorfo a W.
   (e) (05pts) Seja $\mathbb{F} = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ o corpo de frações do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ onde $\mathbb{K}$ é um corpo. Então, todo elemento de $\mathbb{F} \backslash \mathbb{K}$ é transcendente.
   (f) (05pts) Se J é o radical de Jacobson de A e S é um sistema multiplicativo, então $S^{-1}J$ é o radical de Jacobson de $S^{-1}A$.
   (g) (05pts) Se $A \subseteq B$ é uma extensão integral de anéis, Q é ideal primo de B e $P = Q \cap A$, então Q é ideal maximal se, e somente se, P for ideal maximal de A.

2. (05pts) Dê um exemplo de um epimorfismo de A-módulos $V \xrightarrow{\pi} W$ e um A-módulo M tais que o homomorfismo correspondente $\mathrm{Hom}_A(M, V) \xrightarrow{\overline{\pi}} \mathrm{Hom}_A(M, W)$ não seja sobrejetor.

3. Suponha que I seja um ideal do anel A contido no radical de Jacobson, considere $B = A/I$ e sejam V, W A-módulos com V finitamente gerado e $f \in \mathrm{Hom}_A(W, V)$. Sejam também $W' = W/IW, V' = V/IV$ e $f' \in \mathrm{Hom}_A(W', V')$ o homomorfismo induzido por f. Mostre que:
   (a) (05pts) Se $B \otimes_A V = 0$, então $V = 0$.
   (b) (05pts) Se f' é sobrejetor, f também é.

4. (10pts) Suponha que $A \subseteq B$ seja uma extensão integral de anéis e que $S \subseteq A$ seja um sistema multiplicativo. Mostre que $S^{-1}B$ é extensão integral de $S^{-1}A$.

5. (10pts) Calcule a dimensão de Krull do anel $\mathbb{Z}[x, 1/5, \sqrt{5}]$.

6. (a) (05pts) Defina ideal primário e decomposição primária de um ideal.
   (b) (10pts) Considere o anel de polinômios $A = \mathbb{K}[x, y]$ onde $\mathbb{K}$ é um corpo. Encontre duas decomposições primárias reduzidas distintas para o ideal $I = (x^2, xy)$.

7. (10pts) Suponha que A seja um anel Artiniano e J seja o radical de Jacobson de A. Mostre que A/J é isomorfo a um produto cartesiano finito de corpos.

8. Seja A um anel Noetheriano.
   (a) (05pts) Suponha que A seja local e que J seja um ideal $\mathcal{M}$-primário de A onde $\mathcal{M}$ é o ideal maximal de A. Mostre que todo ideal K satisfazendo $J \subseteq K \subseteq \mathcal{M}$ é $\mathcal{M}$-primário.
   (b) (10pts) Sejam P um ideal primo de A, I um ideal P-primário e S o conjunto de todas as cadeias de anéis P-primários contendo I. Mostre que existe uma cota superior finita para o comprimento das cadeias em S.
   (c) (10pts) Sejam P, I e S como no item anterior e S' o conjunto dos elementos maximais de S. Mostre que todo elemento de S' tem o mesmo comprimento (a ordem parcial em S é dada por $c \leq c'$ se c' for um refinamento de c).

   Dica para (b) e (c). Considere $B = A_P/I_P$ e o B-módulo PA_P/I_P (aqui A_P é a localização de A em P e I_P é a imagem de I em A_P). Calcule $\dim_{Kr}(B)$. Use (a) com $A = B$ e $J = (0)$.

Exame de Qualificação do Doutorado

Análise Funcional

20/07/2009

RA.................... Nome.....................................

Ao resolver cada questão, enuncie os resultados utilizados.

1. Seja E um espaço normado, e seja M um subespaço de E de dimensão finita. Seja $y \in E \setminus M$, e seja

$$d = d(y, M) = \inf_{x \in M} \|y - x\|.$$

(a) Prove que existe $x \in M$ tal que $\|y - x\| = d$.

(b) O vetor x de (a) é único? Prove ou exiba um contra-exemplo.

2. Sejam E e F espaços de Banach, e seja $T : E \to F$ uma aplicação tal que $\psi \circ T \in E'$ para cada $\psi \in F'$. Prove que T é linear e contínua.

3. Sejam E e F espaços de Hilbert, e seja $T \in L(E; F)$. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.

(b) $(Tx|Ty) = (x|y)$ para todo $x, y \in E$.

(c) $T^*Tx = x$ para todo $x \in E$.

Sugestão: Para provar a implicação $(a) \Rightarrow (b)$ note que $\|T(\lambda x + y)\|^2 = \|\lambda x + y\|^2$.

4. (a) Prove que

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\frac{sinnt}{\sqrt{\pi}}dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sqrt{\pi}.$$

(b) Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sugestão: Para provar (b) use (a) e a identidade de Parseval.

5. Sejam E e F espaços normados, e seja $T : E \to F$ uma aplicação linear e contínua.

(a) Prove que $T : E \to F$ é contínua se E e F são munidos das topologias fracas.

(b) Prove que $T' : F' \to E'$ é contínua se F' e E' são munidos das topologias fracas-estrela.

Primeiro Exame de Qualificação em
Geometria Riemanniana
Quarta feira, 22/07/2009
Nome: R.A.:
Assinatura

I . (**4**,**0**) Responder se cada uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA** ou **FALSA** fornecendo uma **CURTA** justificativa.

Existe métrica Riemanniana Completa com Curvatura de Gauss < -1 (apenas para a,b,c. O ítem d é independente)

a) No Toro T^2

b) No Espaço Projetivo $\mathbb{R}P^2$

c) No hiperbolóide de revolução de uma folha.

d) Existe superfície mínima com a métrica de subvariedade e compacta no $\mathbb{R}^3$ Euclideano.

II. (**2**,**0**) Seja M^n, uma variedade Riemanniana Simétrica.

a) Forneça uma definição completa desse conceito.

b) Prove que se U, V, W são campos paralelos ao longo uma geodésica de M, então o tensor de curvatura $R(U, V)W$ tambem é paralelo ao longo da mesma geodésica.

III. (**1**,**0**) Define o conceito de Campo de Jacobi e mencione algumas situações para as quais esse conceito é útil.

IV. (**3**,**0**) Em que situações podemos afirmar que a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$, algum $p \in M$, fixo é

a) sobrejetora

b) injetora

c) um difeomorfismo.

d) um recobrimento.

Exame de Qualificação - Topologia Algébrica - Julho 2009

Escolha 4 das 5 questões, explicitando quais questões foram escolhidas. Cada questão têm um valor de 2,5 pontos.

1) Demostre o seguinte critério de equivalência homotópica: Se um par (X,A) satisfaz a propriedade de extensão de homotopia e A é contrátil, então a projeção ao quociente $q : X \to X/A$ é uma equivalência homotópica. Dê uma aplicação do critério.

2) Considere o espaço X quociente obtido do 3-cubo I^3 identificando toda face com a sua oposta mediante uma rotação no sentido horário de 90 graus.

a) Mostre que o grupo fundamental de X é isomorfo ao grupo dos quaternions $\{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$.

b) Calcule a homologia e cohomologia de X com coeficentes em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}_2$.

3) Sejam $X = S^2 \vee S^1 \vee S^1$ e $Y = T^2$ o 2 - toro.

a) Mostre que os complexos C-W de X e Y (munidos das estruturas C-W óbvias) são isomorfos, e por tanto eles tem a mesma homologia e cohomologia.

b) Mostre que X e Y não são homeomorfos.

4) Seja $g : S^n \times S^m$ dada por $h(\theta,\phi) = (\theta, f(\phi))$, onde $f : S^m \to S^m$ é um homeomorfismo, e seja $X = D^{n+1} \times S^m \cup_g S^n \times D^{m+1}$, isto é, X é o quociente $Y/\cong$, onde Y é a união disjunta $D^{n+1} \times S^m \sqcup S^n \times D^{m+1}$ e $\cong$ identifica os pontos das fronteiras $S^n \times S^m$ através de g. Suponha $m > n+1 > 2$ e demostre que X tem a mesma homologia e cohomologia da esfera S^{n+m+1} (sugestão: use a sequência de Mayer-Vietoris, e pode supor que X é uma variedade).

5) a) Seja $V_{n,k} = \{(v_1, \ldots, v_k) \,|\, v_i \in \mathbb{R}^n, \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, e seja $p : V_{n,k} \to S^{n-1}$ dada por $p(v_1, \ldots, v_k) = v_1$. Mostre que p é localmente trivial e consequentemente é uma fibração.

b) No caso de $k = 2$, mostre que p admite uma seção se n é par (sugestão: se $n = 2d$, identifique $\mathbf{R}^{2d}$ e $\mathbb{C}^d$). Isto implica que o fibrado é trivial?

c) Mostre que se $F \cdots E \to B$ tem uma seção, então $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$, $n \geq 2$.

Use isto mais a sequência exata de homotopia para calcular alguns grupos de homotopia de $V_{n,2}$ quando n é par.

Exame de Qualificação de Doutorado
Grupos de Lie
Dezembro de 2009

Questão 1 (2 pontos)
Considere a matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

como um elemento da álgebra de Lie de $SO(3)$. Determine o subgrupo a um parâmetro $\exp(tX)$.

Questão 2 (2 pontos)
Sejam G e H grupos de Lie e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos contínuo. Prove que φ é um homomorfismo de grupos de Lie.

Questão 3 (2 pontos)
Dê exemplo de dois grupos de Lie não abelianos que não são isomorfos, mas cujas álgebras de Lie correspondentes são isomorfas. Demonstre todas as suas afirmações.

Questão 4 (2 pontos)
Use ações transitivas de grupos para construir topologias e estruturas diferenciáveis no conjunto das estruturas complexas em $\mathbb{R}^{2n}$. Lembre que uma estrutura complexa em $\mathbb{R}^{2n}$ é uma aplicação linear $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que $J^2 = -\mathbf{1}$.

Questão 5 (2 pontos)
Seja G um grupo de Lie conexo, e seja $\underline{g}$ a álgebra de Lie correspondente. Mostre que os autovalores de $ad(X)$, $X \in \underline{g}$ são imaginários puros e conclua que a forma de Cartan-Killing $\langle X, Y\rangle = tr(ad(x)ad(y))$ de $\underline{g}$ é negativa semidefinda.

Exame de Qualificação de MM440(Curvas Algébricas)- 2^o Sem/2009

Nesta prova $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotarão respectivamente os corpos de números racionais, reais e complexos.

Escolha 10 entre as 12 questões propostas

1. Dado um corpo K, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $V_n = \{(x, y, z) \in A^3(K);\ \ x + y + z = n\}$. Pergunta-se: $V = \cup_n V_n$ é um subconjunto algébrico de $A^3(K)$? Justifique sua resposta.

2. Enuncie os teoremas de zeros de Hilbert.

3. Sejam K um corpo algebricamente fechado e I, J ideais próprios do anel de polinômios $S = K[X_1, \cdots, X_n]$. Considere $V_1 = \vartheta(I) = \{\underline{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in A^n(K);\ \ f(\underline{a}) = 0\ \ \forall\, f \in I\}$ e $V_2 = \vartheta(J)$. Mostre que:

$$V_1 = V_2 \iff \text{existem } m, n \in \mathbb{N};\ \ I^n \in J \ \text{ e } \ J^m \in I$$

4. Dadas duas curvas $F, G \in \mathbb{C}[X, Y]$. Considere o ideal $I = (F, G) \subseteq \mathbb{C}[X, Y]$, sabe-se que $1 \leq \sharp(\vartheta(I)) = n < \infty$. Mostre que: Se $J = \sqrt{I}$ e $R = \frac{\mathbb{C}[X,Y]}{J}$ então $n = dim_{\mathbb{C}}(R)$ =dimensão de R como $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Cacule n para $F = Y^2 - XY + X(X-1)$ e $G = Y - X^2$.

5. Seja $C \subset A^2(\mathbb{C})$ a curva afim e irredutível dada pela equação $Y^2 - XY - X(X-1) = 0$. Considere $R = \mathbb{C}[C]$ o seu anel de coordenadas (ie, $R = \mathbb{C}[x, y]$ com $y^2 = xy + x(x-1)$) e $k(C)$ o seu corpo de funções racionais. Dado $z = \frac{x}{y}$ encontre o conjunto dos polos e dos zeros de z.

6. Dada a curva afim $F = X^3 + 3X^2 + Y^2 + XY + 2X - Y + 1 \in A^2(\mathbb{C})$. Verifique que o ponto $P = (-1, 1)$ está em F e que que ele é um nó.

7. Dadas as curvas $F = Y^4X^2 + Y^2X^2 + Y^3 + X^2$ e $G = Y^3X^2 + YX^2 + Y^2$. Calcule $I(P, F \cap G)$, onde $P = (0, 0)$.

8. Enuncie o teorema de Bezout para curvas planas e projetivas e mostre que se C_1 e C_2 são cônicas projetivas, irredutíveis , distintas e $\sharp(C_1 \cap C_2) \leq 3$ então as cônicas se tangenciam.

9. Seja C a cúbica regular , dada pela equação $ZY^2 = X(X^2 - Z^2)$. Considere $C, \oplus$ com a estrutura de grupo aditivo tendo $O = (0 : 0 : 1)$ como elemento neutro. Dados $P_1 = (1 : 0 : 1)$, $P_2 = (1 : 0 : -1)$ e $Q = (0 : 1 : 0)$. Mostre que: $2P_1 = 2P_2 = 0$ e que $P_1 \oplus P_2 = Q$, ou seja, $H = \{O, P_1, P_2, Q\}$ é subgro (de Klein) de C.

10. Seja $F = \mathbb{C}(x, y)$ o corpo das funções racionais da cúbica regular $zy^2 = x(x-z)(x-2z)$. Tome $(x)_0$ e $(x)_\infty$ os divisores de zeros e de polos, respectivamente, de x. Calcule o grau de cada um deles (ie, $deg((x)_0) =?$ $deg((x)_\infty) =?$)

11. Seja $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ uma curva regular com corpo de funções racionais F e gênero $g = 1$. Mostre que: para todo $P \in C$ (estamos identificando ponto de C com place) e para todo $1 \leq r \in \mathbb{N}$, $\dim(rP) = r$.

12. Sejam D e D' dois divisores de uma curva regular $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Mostre que: Se $D + D' = W$ com W sendo um divisor canônico então: $\dim(D) - \dim(D') = \frac{1}{2}(deg(D) - deg(D'))$.

Exame de qualificação ao Doutorado

MM–444, Álgebra não Comutativa

Dezembro de 2009

1. (2 pt) a) Definir anel semi-simples (completamente redutível).

b) O anel das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ é semi-simples?

c) O anel das matrizes diagonais $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ é semi-simples?

d) O anel das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{Z}$ é semi-simples?

2. (1 pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita (enumerável) e seja A o conjunto de todos operadores lineares em V que são do tipo $T+\lambda I$, onde a imagem de T têm dimensão finita, I é o operador identidade de V e λ percorre o corpo de escalares.

a) Mostrar que A é um subanel do anel de todos operadores lineares em V (com as operações usuais). Este anel é primitivo?

b) O anel A é artiniano à direita? Noetheriano à direita?

3. (3 pt) a) Sejam A e B duas álgebras sobre um corpo F tais que $A \otimes_F B$ é simples. Mostrar que A e B são simples.

b) Definir grupo de Brauer de um corpo F.

c) A álgebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é com divisão? Ela é simples?

4. (3 pt) Seja L uma álgebra de Lie.

a) Definir álgebra universal envolvente $U(L)$ de L.

b) Seja $\dim L = 3$ e sejam u, v, w uma base de L tal que $[u, v] = w$ e $[w, u] = [w, v] = 0$. Responder às perguntas abaixo:

(b1) $U(L)$ é noetheriana ou não?

(b2) Qual o centro de $U(L)$?

5. (1 pt) Seja $L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a álgebra livre de Lie com geradores livres x_1, x_2, $\ldots$, x_n e seja $L' = [L, L]$ a álgebra derivada de L. Mostrar que o conjunto

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}], \quad i_1 > i_2 \leq i_3 \cdots \leq i_k, k \geq 2,$$

é uma base de L'.

Boa prova!

Exame de Qualificação do Doutorado

Análise Funcional

16/12/2009

RA................... Nome....................................

1. Seja E um espaço normado de dimensão finita, e seja M um subespaço próprio de E. Prove que existe $y \in E$, com $\|y\| = 1$, tal que $\|y - x\| \geq 1$ para cada $x \in M$.

Sugestão: Use o Lema de Riesz.

2. Seja E um espaço normado, e seja $P \in \mathcal{L}(E;E)$ tal que $P^2 = P$. Sejam $M = ImP$ e $N = KerP$.

(a) Prove que $E = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$.

(b) Dado $T \in \mathcal{L}(E;E)$, prove que $TP = PT$ se e só se $T(M) \subset M$ e $T(N) \subset N$.

3. Seja E um espaço de Banach, e sejam M e N dois subespaços fechados de E tais que $E = M + N$. Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que cada $x \in E$ admite uma representação da forma

$$x = s + t, \quad \text{onde } s \in M, \ t \in N, \ \|s\| + \|t\| \leq c\|x\|.$$

Sugestão: Use o Teorema da Aplicação Aberta.

4. Seja E um espaço com produto interno, e sejam $x, y \in E$. Prove que

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{K} \Leftrightarrow x \perp y.$$

5. Seja E um espaço de Hilbert separável, e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal completa em E.

(a) Prove que existe um único operador $T \in \mathcal{L}(E; E)$ tal que $Tx_j = x_{j+1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

(b) Se $T^* \in \mathcal{L}(E; E)$ é o operador adjunto, prove que $T^* x_1 = 0$ e $T^* x_j = x_{j-1}$ para cada $j \geq 2$.

(c) Prove que $T^* T = I$, mas $TT^* \neq I$.

DM–IMECC–UNICAMP
Primeiro Exame de Qualificação de Doutorado
Análise – Equações Diferenciais Parciais I
16/12/2009

Aluno/RA: ______________________________ /____________

Escolha 4 (quatro) questões. Cada questão vale 2,5 pontos.

Questão 1. Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira suave e G a sua função de Green. $(G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi^x(y)$, onde Φ é a solução fundamental do Laplaciano e Φ^x é a função contínua em $\overline{\Omega}$, harmônica (de classe C^2) em Ω e igual a $\Phi(x-\cdot)$ em $\partial\Omega$.) Para quaisquer $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$, mostre que

a) $G(x,y) > 0$;

b) $G(x,y) < \Phi(x-y)$, se $n \geq 3$;

c) $G(x,y) < \Phi(\frac{x-y}{d})$, se $n = 2$, onde d é o diâmetro de Ω.

d) Descreva, em termos da função de Green G, a solução do problema

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \quad u|\partial\Omega = 0.$$

Questão 2. Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, Γ_T a fronteira parabólica de Ω_T $(\Gamma_T = \partial\Omega_T - (\Omega \times \{t = T\}))$ e $\mathbf{b}$ um dado vetor do $\mathbb{R}^n$. Prove o Princípio do Máximo Forte para a equação $u_t - \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = -1$ em Ω_T $(\Delta \equiv \Delta_x,\ x \in \Omega,\ t \in (0,T])$. Mais precisamente, prove que se $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ é uma solução desta equação, então o máximo de u em $\overline{\Omega_T}$ não pode ser atingido num ponto de $\Omega_T - \Gamma_T$.

Questão 3.

a) Se $u_{tt} - \Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ $(x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,\ \Delta \equiv \Delta_x)$ e $u(\cdot,t)$ é radial (com simetria esférica, $u(x,t) = v(r,t)$, $r = |x|$) então u é da forma $u(x,t) = \dfrac{F(r+t) + G(r-t)}{r}$.

b) Se u é solução do problema $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(r), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

então $u = \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tau g(\tau)\, d\tau$, com g estendida a $\mathbb{R}$ de forma par $(g(-\tau) := g(\tau)$ se $\tau < 0)$.

c) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \mathrm{e}^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, x \in \mathbb{R}^3\,. \end{cases}$$

Deixar a resposta dependendo de integrais da função $\mathrm{e}^{-\tau^2}$.

Questão 4.

a) Seja $K(t)$, $K(t)(x) = (4\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx$, o núcleo do calor no $\mathbb{R}^n$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que $K(t) \to \delta$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (no sentido das distribuições temperadas no $\mathbb{R}^n$) quando $t \to 0+$ i.e. $\lim_{t\to 0+} \langle K(t), \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle := \varphi(0)$, para qualquer φ no espaço de Scwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Sejam $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^s \equiv H^s(\mathbb{R}^n)$ e $u(t) := (e^{-it|\xi|^2}\, \widehat{u_0})^\vee$, $t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Mostre que $u(t) \in H^s$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|u(t) - u_0\|_{H^s} \to 0$ quando $t \to 0$ e $u_t = i\Delta u$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ i.e. $\lim_{h\to 0}\langle \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi\rangle = \langle i\Delta(u(t)), \varphi\rangle$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ($\Delta \equiv \Delta_x$, $x \in \mathbb{R}^n$.)

Questão 5. Considere o problema de Cauchy para a KdV (*equação de Korteweg-De Vries*)

$$(*) \qquad \begin{cases} u_t = u_{xxx} + uu_x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Sejam M um subespaço vetorial **real** de dimensão finita da classe de Schwartz $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e H^s o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ real (só com funções reais). Suponhamos que o dado inicial u_0 esteja em M e que valha a estimativa $|(u|uu_x)_{H^s}| \le c\|u\|^3_{H^s}$ para alguma constante c (*estimativa do Kato*), qualquer que seja $u \in \mathcal{S}$, obtenha (mostre a existência de) uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T))$ deste problema, onde $T = (c\|u_0\|_{H^s})^{-1}$ (se $u_0 = 0$, $u = 0$ é solução) e mostre que

$$(*') \qquad \|u(t)\|_{H^s} \le \frac{\|u_0\|_{H^s}}{1 - c\|u_0\|_{H^s}\, t}$$

para todo $t \in [0,T)$, $u(t) \equiv u(\cdot, t)$.

<u>*Sugestão*</u>: Dada uma base de M, $\{\varphi^1, \cdots, \varphi^m\}$ ($m = \dim M$) ortonormal em relação ao produto interno do H^s, temos que $u(t) = \sum_{j=1}^m \beta_j(t)\varphi^j$ é uma solução de $(*)$ se (e somente se) as funções β_j satisfazem o sistema de edo's $\beta_l'(t) = \sum_{j=1}^m \beta_j(t)(\varphi^j_{xxx}|\varphi^l)_{H^s} + \sum_{j,k=1}^m \beta_j(t)\beta_k(t)(\varphi^j_x\varphi^k|\varphi^l)_{H^s}$, com a condição inicial $\beta_j(0) = (u_0|\varphi^j)_{H^s}$, $l = 1, \cdots, m$. Justificada a existência (também temos a unicidade) de solução deste sistema definida em algum intervalo maximal $[0, T_{\max})$, estime $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H^s}$. Use o seguinte fato de EDO (sem demonstrar) sob hipóteses razoáveis: Se $\rho' \le f(\rho)$, $\rho(0) = \rho_0$ e $\gamma' = f(\gamma)$, $\gamma(0) = \rho_0$, para t variando num intervalo contendo a origem, então $\rho(t) \le \gamma(t)$ para todo t neste intervalo.

Exame de Qualificação de Doutorado
Geometria Riemanniana
Dezembro de 2009

Questão 1 (2 pontos)
Seja $U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < v < \infty, -\epsilon < u < 2\pi + \epsilon\}$ e seja $S = \phi(U)$ um parabolóide de revolução, onde $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ é dada por:

$$\phi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), v^2).$$

Encontre a equação de uma geodésica passando pelo ponto $(1,0,1)$, e cujo vetor tangente é da forma (a,b,a).

Questão 2 (2 pontos)
Sejam M e $\overline{M}$ variedades riemannianas e $f : M \to \overline{M}$ um difeomorfismo. Assuma que $\overline{M}$ é completa e que existe uma constante $c > 0$ tal que $||v|| \geq c \cdot ||df_p(v)||$ para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$. Prove que M é completa.

Questão 3 (1 ponto cada item)
Uma variedade riemanianna M de dimensão $n \geq 3$ é chamada Einstein se para quaisquer campos tangentes X e Y vale que $Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y)$, onde Ric é a curvatura de Ricci da métrica g, e $\lambda : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Mostre que:

(a) Se M é uma variedade Einstein conexa, então λ é constante.

(b) Se $n = 3$ e M é uma variedade Einstein conexa, então M tem curvatura seccional constante.

Questão 4 (2 pontos)
Mostre que duas variedades riemannianas de dimensão n completas, simplesmente conexas e de curvatura nula são globalmente isométricas. Em outras palavras, é um $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclideana.

Questão 5 (1 ponto cada item)

(a) Dê um exemplo de uma variedade completa de curvatura seccional constante igual a 1 que não seja a esfera padrão.

(b) Dê um exemplo de uma variedade completa de curvatura seccional constante igual a 0 que não seja o $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclideana.