UNICAMP - IMECC

Pós-Graduação em Matemática – 1º semestre de 2009

Questão *1 (2,5)*

1. *Sejam $A = \{0\} \cup [1,2] \cup \{3\}$ e $B = [0,1] \cup \{2\} \cup \{3\}$ subespaços da reta real $\mathbb{R}$. Mostre que A e B são homeomorfos enquanto subespaços, mas que não existe homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ levando A sobre B.*

2. Seja $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada e $q : A \to \mathbb{R}$ a restrição de p no subespaço $A = \{(x \geq 0, y = 2)\} \cup [(x < 0, y = -2)\}$. Verifique se q é uma aplicação quociente, se é aberta e se é fechada.

Questão 2 *(2,5) Seja X um espaço de Hausdorff. Considere $\{X_n\}$ seqüência de subespaços fechados, com $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n \subset \cdots \subset X$ e $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, satisfazendo*

$$A \text{ é fechado em } X \Leftrightarrow A \cap X_n \text{ é fechado para cada } n.$$

Seja C subconjunto compacto de X. Tome um ponto $t_n \in C \cap (X_n - X_{n-1})$ para todo n para o qual esta intersecção é não-vazia e denote por T o conjunto de todos os pontos t_n.

1. *Mostre que T é fechado e que qualquer subespaço de T é fechado. O que se pode afirmar sobre a topologia de T?*
2. *Prove que T é finito.*
3. *Conclua que C está contido em X_N para algum N.*

Questão *3 (2,5) Recorde que $\mathbb{R}^\omega$ denota o conjunto de todas as seqüências de números reais $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ e uma seguencia é dita eventualmente nula se, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq N$. Considere $\mathbb{R}^\omega$ munido da topologia da caixa. Mostre que x e y pertencem a mesma componente conexa de $\mathbb{R}^\omega$ se, e somente se, a seqüência $x - y$ é eventualmente nula.*

Questão *4 (2,5) Exibir o grupo fundamental de:*

1. S^2
2. $\mathbb{RP}^2$
3. *Cilindro circular reto.*
4. *Faixa de Möbius*
5. *O toro de dimensão 2*

MM719 - 1S 2009 - Exame de Qualificação

NOME:____**RA:**______________________.

Nesta prova $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotarão, respectivamente, o corpo dos reais e dos complexos e $\mathbb{M}_n(K)$ denotará o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo K

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Bom trabalho!

1. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita.

a)(05pts) Defina produto hermitiano em V

b)(05pts) Defina operador normal de V.

c) (05pts) Enuncie o teorema Espectral para operadores de V.

---

2. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ duas transformações lineares com $n > m$.

a) (10pts) Mostre que $U \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ não é isomorfismo linear.

b) (10pts) Para cada par $n > m$ encontre condições necessárias e suficientes sobre T e U para que $T \circ U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ seja um isomorfismo.

---

3. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear, $\mathcal{C}$ a base canônica, $f_T(X)$ o polinômio característico e $p_T(X)$ o polinômio mínimo de T. Encontre a forma de Jordan de T sabendo que:

a)(10pts) Neste caso $n = 6$, $f_T(X) = (X-2)^4(X-1)^2$, $p_T(X) = (X-2)^2(X-1)^2$ e $dimN(T-2I) = 2$ ($N(T-2I)$ é o núcleo de $T-2I$).

b)(10pts) Neste caso $n = 4$ e a matriz de T na base canônica é:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c)(10pts) Neste caso $W = Im(T)$ =imagem de T, $n = 2k+1$, $W \subseteq N(T)$ e $dimN(T) - dimW = 1$.

---

4. (15pts) Seja $f = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}xz$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$. Encontrar um novo sistema de coordenadas $\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$ de tal forma que neste novo sistema f fique na forma de soma de múltiplos de quadrados e escreva explicitamente o novo sistema $\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$ em termos do sistema xyz (ie, escreva $\overline{x}$ em termos de xyz, $\overline{y}$ em termos de xyz e $\overline{z}$ em termos de xyz).

---

5. (10pts) Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $<,>$ o produto interno canônico de V e $T : V \to V$ um operador linear auto-adjunto com auto-valores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Considere $\varphi_T : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi_T(v) =< T(v), v >$, onde $S^{n-1} = \{v \in V; ||v|| = 1\}$. Mostre que: $\forall\, v \in S^{n-1}$, $\lambda_1 \leq \varphi_T(v) \leq \lambda_n$ e mais ainda $\lambda_1 = min\{\varphi_T(v),\ v \in S^{n-1}\}$ e $\lambda_n = max\{\varphi_T(v),\ v \in S^{n-1}\}$.

6.(10pts) Enuncie a propriedade universal que caracteriza o produto tensorial entre dois espaços vetoriais e mostre que: Se V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita n e $T = V \otimes V^*$ então existe um único $\alpha \in T^*$ tal que $\alpha(v \otimes f) = f(v)$ para quaisquer $v \in V$ e $f \in V^*$.

---

7. Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas).

a) (05pts) Todo operador linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ possui um autovetor.

b) (05pts) Existe uma matriz real e simétrica, $A_{3\times3}$, tal que $A \neq I$ e $A^3 = I$.

c)(5pts) Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita n. Se $f, g \in V^*$ com $f \neq 0$ e $N(f) = N(g)$ ($N(-)$=núcleo do funcional linear)) então existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $g = \alpha f$.

d)(5pts) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é operador linear então $V = Im(T) \oplus N(T)$, onde $Im(T)$ é imagem de T e $N(T)$ é o núcleo de T.

BOA PROVA

Análise no $\mathbb{R}^n$ ps2009

(1) Enuncie e demonstre o método dos multiplicadores de Lagrange.

(2) Sejam α e β duas 1-formas no $\mathbb{R}^3$ tais que $\alpha \wedge \beta \neq 0$ em todos pontos de um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Considere uma 2-forma ω com a propriedade de que $\omega \wedge \alpha = \omega \wedge \beta = 0$ em todos pontos de U ... mostre que $\omega = f \cdot \alpha \wedge \beta$ onde $f : U \to \mathbb{R}$.

(3) Seja ω uma 1-forma num aberto U de $\mathbb{R}^3$. Mostre que se ω anula-se sobre todos vetores tangentes a uma superfície contida em U o mesmo ocorre com $d\omega$ ...isto é, $d\omega(v, w) = 0$ para qualquer par de vetores (v, w) tangentes à tal superfície.

(4) Apresente uma 3-forma fechada mas não exata em $\mathbb{R}^4 -$origem. Dica: sabe-se que

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

é fechada e não exata em $\mathbb{R}^2 -$ origem ... e que

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

é fechada e não exata em $\mathbb{R}^3 -$ origem. Justifique.

(5) Seja $M \subset \mathbb{R}^5$ o tronco do hipertoro

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; ,$$
$$w^2 + t^2 = 1 \; ,$$
$$t \geq 0 \; ,$$

encontre um 3-simplexo no $\mathbb{R}^5$,

$$m : [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \to \mathbb{R}^5$$

tal que sua imagem coincide com M e calcule a 2-cadeia ∂m.
Calcule então

$$\iiint_m \beta$$

onde β é uma 3-forma no $\mathbb{R}^5$ dada por

$$\beta = 3\,w\,dx \wedge dy \wedge dz + dw \wedge (x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy) \; .$$

Sugestão: encontre α tal que $\beta = d\alpha$ e use Stokes.

Boa Sorte.

MM719 - 2S 2009 - Exame de Qualificação

Nome: ______________________________ RA: __________ 14/12/2009

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Bom trabalho!

1. Dados um corpo K, dois K-espaços vetoriais V e V' e L uma transformação linear de V em V' chame de $N(L)$ o núcleo de L, $Im(L)$ a imagem de L e $p(L) = \dim_K Im(L) =$ o posto de L. Agora considere $T, S : V \to V'$ duas transformações lineares entre espaços de dimensão finita e mostre que:

a)(10pts) Se $p(T) = p(S) = 1$, então: $p(T + S) \leq 1 \iff N(T) = N(S)$ ou $Im(S) = Im(T)$

b)(5pts) Se $p(T) = p(S) = 1$, $N(S) = N(T)$ e $Im(S) = Im(T)$ então T e S são linearmente dependentes (LD)

---

2. Considere a função $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $q(x, y, z) = 2x^2 + 6xy - 2xz - z^2$.

a)(02pts) Encontre uma forma bilinear simétrica f tal que $q(v) = f(v, v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

b)(05pts) Encontre uma base do subespaço $W = \{(0, 0, 1)\}^{\perp}$. (aqui ortogonalidade é com relação a f)

c)(03pts) Seja $\beta = \{v_1, v_2\}$ a base encontrada no item anterior e g a restrição de f a $W \times W$. Calcule $[g]_\beta$.

d)(03pts) Encontre uma base ortogonal de W com relação a g.

e)(02pts) Calcule o índice e o posto de f.

---

3. a)(05pts) Enuncie o teorema da decomposição primária.

b)(10pts) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Encontre bases para cada subespaço de $\mathbb{R}^3$ que aparece no Teorema da Decomposição Primária para o operador T.

---

4. Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão $n < \infty$, com produto interno (hermitiano) $<,>$ e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é anti-hermitiano se para quaisquer $u, v \in V$ tem-se que $< Tu, v >= - < u, T(v) >$. Assuma que T é anti-hermitiano e mostre que:

a)(6pts) Os autovalores de T são do tipo $i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais ainda se $\lambda, \xi \in \mathbb{C}$ são auto valores distintos de T e $u, v \in V \setminus \{0\}$ são tais que $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \xi v$ então $< u, v >= 0$.

b)(9pts) Existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

5.(10pts) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3+4i \\ 0 & 5 & 0 \\ 3-4i & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$. Encontre uma matriz unitária P e uma matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$ e calcule P^{-1}.

6.(15pts) Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + y) \qquad \text{e} \qquad S(x, y, z) = (x, x + y, x + y - z).$$

Encontre a forma canônica de Jordan de $T \otimes S$.

---

7. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando suas respostas.

a)(5pts) Se V é espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e v é um autovetor de um transformação linear $T : V \to V$, então v também é autovetor de T^*, onde T^* é a adjunta de T.

b) (05pts) Se $\varphi : V \times V \to W$ é uma função bilinear, a imagem de φ é um subespaço de W.

c)(05pts) Se $p \in \mathbb{N}$ é um número primo impar e V é um K-espaço vetorial de dimensão finita p, então V é isomorfo a uma 2-potência simétrica de um K-espaço vetorial W se e somente se $p = 3$.

---

8. Sejam $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas complexas e $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

a)(10pts) Se $A = J(\lambda) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é um bloco de Jordan encontrar a forma de Jordan de A^t.

b)(10pts) Mostre que: Se $m \in \mathbb{N}$ e $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ então existe $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ invertível tal que $PBP^{-1} = B^t$.

Exame de Qualificação   Análise no $\mathbb{R}^n$ Dezembro de 2009

Nome: ________________________________ RA: __________

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Total

Q1. (2,0 pontos) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada *homogênea de grau* 1 se para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ tivermos $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, homogênea de grau 1.

(a) Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$ e suponha que f é diferenciável em x_0. Mostre que para qualquer $\lambda > 0$, f é diferenciável em λx_0 e que $\nabla f(\lambda x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$.

(b) Mostre que se f é diferenciável em 0 então f é linear.

Q2. (2,0 pontos) Sejam f e g aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 e suponha que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ é inversível. Para cada $r \in \mathbb{R}$ defina $h_r = h_r(x) \equiv f(x) + rg(x)$. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que, se $|r| < \epsilon$, h_r se anula em um ponto x_r, e que $\lim_{r\to 0} x_r = 0$. Sugestão: forma local das submersões.

Q3. (2,0 pontos) Seja Ω um aberto convexo em $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, estritamente convexa em Ω, isto é, uma função cujo Hessiano é positivo definido em todo ponto de Ω. Mostre que $\nabla F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é injetivo.

Q4. (2,0 pontos) Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo vetorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e de suporte compacto, e seja $\Omega_\epsilon \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\epsilon < y < \epsilon\}$. Mostre que:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} F \, dxdy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, 0)dx.$$

Q5. (2,0 pontos) Considere as formas diferenciais $\omega_1 = 2xy\,dx + (x^2 - 2y^2)\,dy$ e $\omega_2 = \cos y\,dx + x \sin y\,dy$. Determine quais destas formas são fechadas e ache uma 0-forma α tal que aquelas que forem fechadas sejam $d\alpha$.

Boa Prova!

Exame de Qualificação de Mestrado
Topologia Geral
Dezembro de 2009

Questão 1 (2 pontos)
Seja $\mathbb{R}_f$ o conjunto dos números reais munido da topologia dos complementos finitos, ou seja, um conjunto é aberto se e somente se for vazio ou se o seu complemento for finito. Seja $\mathbb{R}_s$ o conjunto dos números reais munido da topologia usual. Mostre que a aplicação identidade $\mathbf{1} : \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}_f$ é contínua, mas a sua inversa não é. Mostre ainda que:

(a) $\mathbb{R}_f$ satisfaz o axioma T_1, mas não é Hausdorff;

(b) todo subconjunto de $\mathbb{R}_f$ é compacto.

Questão 2 (2 pontos)
Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Mostre que se Y é conexo, e se para todo $y \in Y$ a fibra $p^{-1}(y)$ também é conexo, então X é conexo.

Questão 3 (2 pontos)
Seja X um espaço topológico e $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ o disco unitário munido da topologia usual. Mostre que uma aplicação contínua $f : S^1 \to X$ é homotópica a uma aplicação constante se e somente se f possui uma extensão contínua $\tilde{f} : D^2 \to X$.

Questão 4 (2 pontos)
Seja $p : E \to B$ um espaço de recobrimento tal que $p^{-1}(b_0)$ possui exatamente k pontos. Mostre que $p^{-1}(b)$ possui exatamente k pontos para todo $b \in B$. Mostre ainda que se B é compacto, então E também é compacto.

Questão 5 (1 ponto cada item)
Demonstre as seguintes afirmações:

(a) $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2$.

(b) Dados dois espaços topológicos X e Y, e pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.