EXAME DE QUALIFICAÇÂO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA
PROVA DE PROBABILIDADE

6 de janeiro de 2009

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie cada questão em uma nova folha. Use só um lado de folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*
- *Tranquilidade e bom trabalho!*

1. Um conjunto A se diz finito se $\#A$ é finito. Um conjunto A se diz co-finito se $\#A^c$ é finito. Seja Ω um conjunto tal que $\#\Omega = \infty$. Seja $\mathcal{F}$ a familia de subconjuntos A de Ωtais que A é finito ou cofinito. Demonstre que $\mathcal{F}$ é uma álgebra mas não é uma σ-álgebra.

2. Sejam X e Y v.a.
   (a) Suponha que X e Y só assumem valores 0 e 1. Mostre que neste caso se $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$, então X e Y são independentes.
   (b) Suponha que X assume valores a e b, e Y assume valores c e d. Mostre que neste caso se $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, então X e Y são independentes.
   Dica: não é necessário fazer muita conta.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. com $\mathbf{E}X_1 = 0$ e $\mathbf{E}(X_1^2) = 2$.
   Ache o limite em distribuição da sequência $Y_1, Y_2, \ldots$, onde
$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}.$$

4. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Para $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots$, mostre que
$$\mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n),$$
   onde
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$
   Ajuda: Lembre que uma probabilidade é continua para uma sequência de conjuntos crescentes e decrescentes.

5. Seja $(X_i)_{i\in N}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuidas com $P(X_1 = 1) > 0$. Qual é a probabilidade de observar $(1,1)$ infinitas vezes na sequência? DEMONSTRE SUAS afirmações.

EXAME DE QUALIFICAÇÂO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA
PROVA DE PROBABILIDADE

13 de fevereiro de 2009

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie cada questão em uma nova folha. Use só um lado de folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*
- *Tranquilidade e bom trabalho!*

1. Seja $\mathcal{A}$ uma classe de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que consiste de uniões finitas de intervalos disjuntos, onde os intervalos podem ser da forma $(-\infty, a]$, $(b, c]$, $(d, +\infty)$. Mostre que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, mas não uma σ-álgebra.

2. Sejam $X_i, i = 1 \ldots n$ uma sequência de v.a. com média μ e variância σ^2. Suponha que $\lim_{n\to\infty} Var(S_n^2) = 0$. Mostre que S_n^2 converge em probabilidade para σ^2, onde

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. com $\mathbf{E}X_1 = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_1^2) = \sigma^2 < \infty$. Suponha que $P(S_n \neq 0) = 1$ e que $\lim_{n\to\infty} Var(S_n^2) = 0$. Ache o limite em distribuição da sequência

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

onde S_n^2 é a do exercício anterior.

4. Considere um espaço de probabilidade sobre os naturais $\mathbb{N}$.

   - Defina os conjuntos $A_n = \mathbb{N}\backslash\{n+1, \ldots, 2n\}$. Calcule $\liminf_{n\to\infty} A_n$ e $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Calcule $\liminf_{n\to\infty} P(A_n)$ e $\limsup_{n\to\infty} P(A_n)$.
   - Idem com $A_n = \mathbb{N}\backslash\{1, \ldots, n\}$.

Nome

RA

Assinatura

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

EXAME de INFERÊNCIA

08 de Janeiro de 2009

Instruções

1. A duração do exame é de 4 horas.
2. Não é permitida consulta.
3. Resolva quatro (4) das cinco (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.

Questão	1	2	3	4	5

4. Cada questão tem a mesma pontuação.
5. Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.
6. Escreva de maneira clara e organizada.
7. **Justifique** suas respostas.
8. Numere e identifique cada folha utilizada.

Tranquilidade e Bom trabalho

Questão 1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade Beta(μ,1)

(a) (*6 ptos*) Encontre o ENVVUM para $1/\mu$.

(b) (*7 ptos*) Encontre um intervalo de confiança assintótico para μ^2.

(c) (*12 ptos*) Adicionalmente, seja $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da densidade Beta(θ,1) onde Y_j é independente de X_i para todo i, j. Encontre um teste *exato* para $H_0 : \mu = \theta$ vs $H_1 : \mu \neq \theta$.

Questão 2

(a) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\}, \quad x \geq 0,\ \lambda > 0.$$

Seja o estimador $T = X_{(1)}$.

(i) (*6 ptos*) Compare a variância de T com o Limite Inferior de Cramér-Rao (LICR).

(ii) (*5 ptos*) Verifique se T é consistente.

(iii) (*3 ptos*) No caso de tamanho amostral grande. Conforme os resultados obtidos nos itens anteriores, você sugere a utilização de T como estimador de λ? Em caso contrário, proponha um estimador melhor.

(b) Seja X uma observação da densidade,

$$f(x) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|}, \quad x = -1, 0, 1, \quad \theta \in [0, 1].$$

(i) (*5 ptos*) X é uma estatística completa?

(ii) (*4 ptos*) $|X|$ é uma estatística suficiente e completa?

(iii) (*2 ptos*) $f(x)$ pertence à família exponencial?

Questão 3

(a) (*8 ptos*) Seja X uma observacão gerada pela densidade,

$$f(x) = \frac{\nu}{\lambda\Gamma(1/\nu)2^{1+1/\nu}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^{-\nu} \mid x \mid^{\nu}\right\}, \quad \lambda > 0, \quad \nu > 0,$$

onde

$$\lambda^2 = 2^{-2/\nu}\frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}.$$

Encontre o teste Mais Poderoso (MP) de tamanho α para $H_0 : \nu = 2$ vs $H_1 : \nu = 1$.

Lembrete: $\Gamma(x) = x\Gamma(x-1), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(b) (*8 ptos*) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f(x_1) = \theta(1-\theta)^{-1}x_1^{(2\theta-1)/(1-\theta)}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad \theta \in (1/2, 1).$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.

(c) (*9 ptos*) Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da densidade Exponencial com valor esperado λ. Encontre o intervalo unilateral para λ do tipo $[0, T(X)]$ que seja Uniformemente Mais Acurado (UMA) de confiança $1 - \alpha$.

Questão 4

(a) Seja X uma observação da densidade,

$$f(x) = 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x), \quad 0 < x < 1, \quad \theta \in [0, 1].$$

(i) (*6 ptos*) Existe um teste Mais Poderoso (MP) de nível 0.2 para

$$H_0 : \theta = 1/2 \text{ vs } H_1 : \theta = 3/4 \text{ ?}$$

(ii) (*5 ptos*) Compare o teste encontrado no item (i) com um outro teste cuja região crítica é: $RC = \{x : 0.6 < x < 0.8\}$. Qual desses testes é melhor?

(b) Seja $X_1, \ldots X_n$ uma amostra aleatória da densidade,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{8}(x-\theta)^2\right\}, \quad x \geq \theta, \quad \theta > 0.$$

(i) (*9 ptos*) Encontre um intervalo de confiança $1-\alpha$ assintótico para θ. *Sugestão:* pode ser útil considerar, $\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-s}s^{u-1}ds, \; \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(ii) (*5 ptos*) Proponha um teste para $H_0 : \theta = 2$ vs $H_1 : \theta > 2$, ao nível $\alpha = 0.02$.

Questão 5

Suponha que dado μ, as variáveis aleatórias X_i são independentes com densidade condicional: $X_i/\mu \sim N(\mu, 1)$ para $i = 1, \ldots, n$. Considere que μ é uma variável aleatória com densidade a-priori $\mathrm{N}(0, \tau^2)$.

(a) (*5 ptos*) Supondo τ conhecido, encontre o estimador de Bayes sob perda quadrática para μ.

(b) (*5 ptos*) Supondo τ conhecido, encontre o intervalo de máxima probabilidade a-posteriori (HPD) de 95% para μ.

(c) Nas aplicacões, uma forma de asignar um valor ao hiperparámetro τ^2 é através do procedimento *Bayes Empírico*. Este método faz uso dos dados para asignar valores aos hiperparámetros. Siga os seguintes passos:

  (i) (*8 ptos*) Encontre a densidade marginal de X_i e mostre que $X_1, \ldots, X_n$ é uma sequência de variáveis aleatórias IID.

  (ii) (*7 ptos*) Já que a densidade de X_i em (i) depende de τ^2, use a amostra $X_1, \ldots, X_n$ para propor um estimador para τ^2. Justifique a escolha desse estimador.