Exame de Qualificação do Doutorado

Análise Funcional

14/07/2008

1. Seja $1 \leq p < \infty$, seja $S : \ell_p \to \ell_p$ o operador definido por

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...),$$

e seja $T_n = S^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calcule $\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$ para cada $x \in \ell_p$.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|$.

2. Seja E um espaço de Banach, e seja D um subconjunto denso de E. Seja $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência no dual E'. Prove que $\phi_n(x) \to \phi(x)$ para cada $x \in E$ se e só se $\sup_n \|\phi_n\| < \infty$ e $\phi_n(x) \to \phi(x)$ para cada $x \in D$.

3. Sejam E e F espaços de Banach, e seja $T : E \to F$ um operador linear e contínuo. Suponhamos que existam um espaço de Banach G, e operadores lineares $A : E \to G$ e $B : G \to F$ tais que $T = B \circ A$. Se B é contínuo e injetivo, prove que A é contínuo.

Sugestão: use o teorema do gráfico fechado.

4. Seja E um espaço de Hilbert, com produto interno $(.|.)$, e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência ortonormal em E.

(a) Prove que

$$\lim_{n\to\infty} (x|x_n) = 0 \ \text{ para cada } \ x \in E.$$

Sugestão: use a desigualdade de Bessel.

(b) Determine se a seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente convergente. Em caso afirmativo, qual é o limite?

5. Consideremos o espaço de Hilbert $L_2[0, 1]$, com o produto interno usual

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

(a) Mostre que o operador linear $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ definido por

$$Tf(t) = \int_0^t f(s)ds$$

é contínuo e $\|T\| \leq 1$.

(b) Mostre que o operador adjunto $T^* : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ é dado por

$$T^*g(s) = \int_s^1 g(t)dt.$$

Exame de Qualificação
Topologia Algébrica - julho 2008

Valor das questões: 4 - 4 - 2.

---

1) Considere o espaço X quociente de cubo I^3 obtido identificando lados opostos por uma rotação de 90 graus à direita.

a) Descreva como X uma estrutura C-W com 2 0-células, 4 1-células, 3 2-células e uma 3-célula.

b) Calcule $\pi_1(X)$.

c) Descreva o complexo C-W de X.

d) Calcule a homologia e cohomologia de X com coeficentes em $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Q}$.

e) É $H_\bullet(X, \mathbb{Z}_2)$ compatível com X ser uma variedade?

f) Calcule $H_k(X \times \mathbb{R}P^2)$.

---

2) Seja $\Omega_{x_0}(X) = \{\gamma : [0,1] \to X \ : \ \gamma(0) = x_0\}$ os caminhos baseados em x_0, e $p : \Omega_{x_0}(X) \to X$ dada por $p(\gamma) = \gamma(1)$

a)Esboce as principáis ideias para mostrar que p é uma fibração de Hurewicz, e descreva geométricamente à aplicação fronteira (sugestão: procure construções tautológicas).

b) Explique as conseqüências da seqüência exata de homotopia desta fibração.

c) Mostre que no caso $X = S^1$, o problema de levantamento para a identidade de S^1 não admite solução.

---

3) Calcule a homologia (simplicial) relativa do 2-simplex módulo a sua fronteira.

Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 11/07/2008

Nome: ______________________________ RA: __________

Nesta prova todos os anéis considerados são comutativos com identidade não nula.Os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais serão denotados respectivamente por: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

1.(4pts) Decida se cada uma das afirmações abaixo é falsa ou verdadeira. Justifique em detalhes suas respostas.

a) (1pt) Sejam A e B dois anéis. Se A é anel Artiniano e B é um domínio que **não contem** um corpo então **não existe** um homomorfismo,φ, do anel A no anel B(lembro que por definição $\varphi(1) = 1$).

b) (1pt) Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ dois números primos distintos. Se M é um $\mathbb{Z}$-módulo não nulo, finitamente gerado e tal que $pM = \{pm;\ m \in M\}$ e qM são livres, então M é livre.

c)(1pt) Sejam R, m um anel noetheriano local e $k = \frac{R}{m}$ o seu corpo de resíduos. Então temos: se $dim_{Krull}(R) \geq 2$ então a dimensão do k-espaço vetorial $\frac{m}{m^2}$ também é ≥ 2.

d)(1pt)Sejam $A = K[X, Y]$ o anel de polinômios a 2 variáveis sobre um corpo K e $I \subset A$ um ideal não trivial. Se $\mathcal{V}(I) = \{(a, b) \in K^2;\ F(a, b) = 0,\ \forall F \in I\}$ é um conjunto finito e não vazio então o anel $\frac{A}{I}$ é anel artiniano.

---

2) (3pts) Sejam R anel e $\wp \in Spec(R)$ = conjunto dos ideais primos de R.

a) Defina os seguintes conceitos: A altura de $\wp$, coaltura de $\wp$ e a dimensão de Krull de R. Diga qual a dimensão de krull de R se $R = K_1 \times K_2 \cdots \times K_n$ onde para todo i, K_i é corpo e exiba um exemplo de um anel de dimensão de krull infinita

b) Neste item vamos supor que R/A é uma extensão de domínios que não são corpos. Mostre que: Se A e R são K-álgebras finitamente geradas com K sendo corpo então $dim_{Krull}(A) \leq dim_{Krull}(R)$. Dê um exemplo de que isto não é em geral verdadeiro.

c) Mostre em detalhes que: Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ então $dim_{Krull}(\mathbb{Z}[\alpha]) = 1$.

d) Determine a dimensão de Krull de $B = A[X, \sqrt{3}]$ e a coaltura do ideal $(X) = X.B$, onde $A = S^{-1}\mathbb{Z}$, $S = \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$ e X é transcendente sobre $\mathbb{Q}$ (justifique em detalhes sua resposta).

---

3) (3pts) Sejam R um anel, M e N dois R-módulos.

a) Defina os seguintes conceitos: M é R-módulo noetheriano e N é R-módulo artiniano. Exiba uma condição genérica sobre R que possa garantir que sempre existe um R-módulo que é noetheriano mas não é artiniano.

b) Defina o conceito de módulo de comprimento finito e mostre que: Se M é artiniano e noetheriano então M tem comprimento finito.

c) Mostre que se M tem comprimento finito igual a n, $n \geq 1$ então M pode ser gerado por n elementos.

BOA PROVA

Examé de Qualificação: Geometria Riemanniana

16/07/2008

Escolher duas das seguintes questões:

1. Sejam M e N variedades Riemannianas com metricas g_M e g_N respectivamente. Uma isometria local é um difeomorfismo $F : U \subset M \to N$ sobre sua imagem tal que $F^* g_N = g_M$. Um campo vetorial X em M se diz Killing se seu fluxo local ϕ_t^X consiste de isometrias locais. Prove que

   a) Um campo lineal en $\mathbb{R}^n$ definido pela matriz A é Killing se e somente se A é anti-simétrico.

   b) Seja $F : M :\to N$ uma isometria, e X um campo de M. Prove que X é Killing se e somente se o campo $F_* X$ de N é Killing.

   c) Seja X um campo Killing de M se e somente se

   $$g_M(\nabla_Y X, Z) + g_M(Y, \nabla_Z X) = 0,$$

   para quaisquer Y e Z campos de M.

2. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que duas k-uplas $(p_1, ..., p_k)$ e $(q_1, ..., q_k)$ de pontos de M, são isométricas se $d(p_i; p_j) = d(q_i; q_j)$ para $i,\ j \in \{1, ..., k\}$ onde d é a distancia de M. A variedade M se diz k-ponto homogênea se para quaisquer k-uplas isometricas $(p_1, ..., p_k)$ e $(q_1, ..., q_k)$ de M existe uma isometria $F : M \to M$ tal que $F(p_i) = q_i$ para $i = 1, ..., k$. Prove que:

   a) Uma variedade 1-ponto homogênea é (geodesicamente) completa.

   b) Toda variedade 2-ponto homogênea verifica que a derivada covariante do tensor de curvatura é nulo.

3. Seja M uma variedade com métrica g. Seja $f \in C^\infty(M)$ e $g' = e^{2f} g$. Prove que a conexão de Levi-Civita ∇' de g' escreve-se como

   $$\nabla'_V W = \nabla_V W + df(V)W + df(W)V - g(V, W) grad_g(f)$$

Escolher duas das seguintes questões:

1. Enuncie e demonstre o teorema de Hopf-Rinow.
2. Enuncie e demonstre o teorema de Bonnet-Myers.
3. Enuncie e demonstre o teorema de Singe.