Exame de Qualificação em Análise
Mestrado – Julho de 2008

Nome:

RA:

Questão 1

(a) Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3$ é uma aplicação aberta mas não é uma submersão.

(b) Dê um exemplo de uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ que seja injetiva mas não seja uma imersão. Justifique.

Questão 2 Considere uma função continuamente diferenciável

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$$

tal que para um certo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in intU$ tem-se que $\psi'(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é injetora.

(a) Mostre que para algum par (i, j), com $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, e $i < j$, existe um aberto V com $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V \subset intU$ e tal que a aplicação definida para $(x_1, x_2) \in V$ por $h(x_1, x_2) = (\psi_i(x_1, x_2), \psi_j(x_1, x_2))$ é um difeomorfismo C^1 sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^2$.

Sugestão: considere a matriz Jacobiana da aplicação no ponto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

(b) Suponha por simplicidade que o resultado do ítem (a) valha para $i = 1, j = 2$. Mostre que para todo $(x_1, x_2) \in V$ existe um único $(y_1, y_2) \in W$ e uma função $f = (f_1, f_2) : W \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi(x_1, x_2) = (y_1, y_2, f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))$. Em outras palavras, mostre que $\psi(V)$ é o gráfico de $f : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(3) Seja $f = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ uma função não identicamente nula de classe C^1 e posto 3 em todos pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Mostre que a função $g(x)$ definida por $g(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2$, $x \in U$, não tem ponto de máximo no aberto U.

Sugestão: argumente por contradição considerando ∇g e observando o sinal de g.

Questão 4 Considere o problema de encontrar os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z, w) = x^2 + w^2$, submetidos aos vínculos $g_1(x, y, z, w) = 0$, $g_2(x, y, z, w) = 1$, $g_3(x, y, z, w) = 1$, onde as três funções vinculantes são dadas por $g_1(x, y, z, w) = z^2 - x^2 - y^2$, $g_2(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 + (w-1)^2$, $g_3(x, y, z, w) = 2 - x^2 - y^2$.

(a) Identifique o conjunto dos pontos admissíveis, isto é,

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \; g_1(x, y, z, w) = 0, g_2(x, y, z, w) = 1, g_3(x, y, z, w) = 1\},$$

e mostre que ele está contido em um subespaço afim (isto é, um transladado de um subespaço vetorial) de dimensão dois.

(b) Enuncie a forma geral do método clássico dos multiplicadores de Lagrange. Este método pode ser aplicado ao problema de encontrar os pontos críticos da f descrita acima com os vínculos dados? Justifique.

(c) Encontre os pontos críticos do problema vinculado e classifique-os.

Questão 5

(a) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Mostre que o operador pullback f^* é tal que se α e β são formas de grau k e l, respectivamente, então $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

(b) Sendo f como no ítem (a), mostre que o operador diferenciação exterior e o operador pullback f^* comutam.

Sugestão: proceda por indução finita.

(c) Ainda com as notações do ítem (a), se α for uma forma fechada, $f^*(\alpha)$ é fechada? Se α for uma forma exata, $f^*(\alpha)$ é exata? Justifique suas respostas.

Questão 6 Considere a calota $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 1/2\}$ e a 2-forma $\beta = 2x dx \wedge dz + 2z dy \wedge dz$.

(a) Obtenha uma 1-forma α tal que $d\alpha = \beta$.

(b) Exiba uma parametrização de ∂M.

(c) Calcule $\int_M \beta$.

MM719 - 1S 2008 - Exame de Qualificação

Nome: ______________________________________ RA: __________ 11/07/2008

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Bom trabalho!

1. Escreva as definições dos seguintes conceitos:
   (a) (05pts) Auto-espaço generalizado de um operador linear.
   (b) (05pts) Núcleo de uma forma bilinear.

2. (05pts) Enuncie a propriedade universal do produto tensorial entre dois espaços vetoriais.

3. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando suas respostas.
   (a) (05pts) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $PAP^{-1} = A^t$.
   (b) (05pts) Se A é uma matriz mxn, B é uma matriz nxm e $n < m$, então det(AB)=0.
   (c) (05pts) Sejam A uma matriz simétrica associada a uma forma quadrática f em $V = \mathbb{C}^n$ e $g : V \times V \to \mathbb{C}$ a forma bilinear determinada por A. Se os autovalores de A são distintos, então existe um único conjunto $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de subespaços unidimensionais de V que geram V e satisfazem $g(V_i, V_j) = \{0\}$ quando $i \neq j$.
   (d) (05pts) A imagem de uma função bilinear é um subespaço vetorial do seu contradomínio.

4. (10pts) Seja $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$. Calcule a matriz de f na base $\{(2, 0, -1), (1, -1, -2), (0, 1, 3)\}$.

5. (10pts) Sejam T e S dois operadores lineares autoadjuntos em $V = \mathbb{C}^n$ com o produto interno usual (u, v). Mostre que se $(T(v), v) = (S(v), v)$ para todo $v \in V$ então $T = S$.

6. (10pts) Suponha que V seja um espaço vetorial real de dimensão 5 e que $T : V \to V$ seja uma aplicação linear com polinômio mínimo igual a $p(x) = x(x^2 + 1)$. Descreva as possíveis decomposições de V em subespaços invariantes por T.

7. (15pts) Seja $T : V \to V$ o operador linear em $V = \mathbb{C}^4$ definido por
$$T(x, y, z, w) = (-2x + 4y, -x + 2y, -2x + 4y - z, 3x - 6y - w).$$
Encontre uma base de Jordan para T e a forma canônica de Jordan de T.

8. (15pts) Suponha que $T, S : V \to V$ sejam operadores lineares sobre um espaço vetorial real V de dimensão finita satisfazendo $TS = ST$. Se $p(x)$ é um fator irredutível do polinômio característico de T, mostre que o espaço $V_p = \{v \in V : (p(T))^k(v) = 0 \text{ para algum } k > 0\}$ é um subespaço S-invariante não trivial.

9. (15pts) Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é anti-hermitiana, então A é unitariamente diagonalizável e seus autovalores são imaginários puros.

Exame de Qualificação: Topologia

16/07/2008

Escolher quatro das seguintes questões:

1. a) Sejam X e Y espaços topológicos onde Y é compacto. Seja $x_0 \in X$. Prove que para qualquer aberto N tal que $\{x_0\} \times Y \subset N \subset X \times Y$, existe um aberto $U \subset X$ tal que $\{x_0\} \times Y \subset U \times Y \subset N$.

   b) Provar que se X e Y são compactos então $X \times Y$ é compacto. Não pode assumir o teorema de Tychonoff.

2. a) Sejam X um espaço topológico regular e $A \subset U \subset X$ com A compacto e U aberto. Provar que existe um aberto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

   b) Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma familia de espaços topológicos. Prove que o produto $\Pi_{i \in I} X_i$ é regular se e somente se cada fator X_i é regular.

3. a) Prove que todo espaço métrico é normal.

   b) Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathfrak{F}$ uma familia de fechados com interseção vazia. Prove que existe uma constante $\lambda > 0$ tal que todo subconjunto A de X com diâmetro menor que λ é disjunto de algum $F \in \mathfrak{F}$.

4. Topologia dos intervalos semi-abertos (reta de Sorgenfrey). Consideramos $\mathbf{R}$ com a topologia definida pela base dos intervalos semi-abertos $[a, b)$, denotamos este espaço topológico por $\mathbf{R}_l$. Prove que

   (a) $\mathbf{R}_l$ verifica o primeiro axioma de enumerabilidade e não verifica o segundo axioma de enumerabilidade.

   (b) $\mathbf{R}_l$ é separavel e Lindelof

   (c) $\mathbf{R}_l$ é normal.

   (d) $\mathbf{R}_l \times \mathbf{R}_l$ não é Lindelof. Considere $L = \{(x, -x) : x \in \mathbf{R}\}$ prove que é fechado e discreto.

5. a) Seja X um espaço topológico. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

   i.- Toda aplicação continua $f : S^1 \to X$ é homotópica a uma aplicação constante.

   ii.- Toda aplicação continua $f : S^1 \to X$ tem uma estensão a uma aplicação continua $F : D^2 \to X$.

   iii.- Para todo $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0) = 0$.

   b) Prove ou dê contra-exemplo para as seguintes afirmações:

   i.- $\pi_1(S^1 \times S^3 \times \mathbf{RP}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

   ii.- $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^3$.