Nome:

RA:

Assinatura:

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

EXAME DE INFERÊNCIA

04 de Janeiro de 2008

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de quatro (4) horas.

2. Não é permitida consulta.

3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.

4. Escolha e resolva **quatro** (4) das cinco (5) **questões** apresentadas a seguir.

5. Tranqüilidade e Boa Sorte.

1. Considere uma amostra simples, X_1, proveniente da seguinte densidade

$$f(x) = (1/2)\exp\left(-|x-\alpha|\right) = \begin{cases} (1/2)\exp(\alpha - x) & \text{se} \quad x > \alpha \\ (1/2)\exp(x-\alpha) & \text{se} \quad x \leq \alpha \end{cases},$$

1.1. [9pts] Calcule o teste mais poderoso de tamanho δ para $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha = \alpha_1,\ \alpha_1 > \alpha_0$, em que $1 - \delta >> 1/2$.

1.2. [6pts] Considere o espaço dos testes mais poderosos de tamanho δ, em que $1-\delta >> 1/2$, para $H_0 : \alpha = 1$ vs $H_1 : \alpha = 2$. Determine o elemento desse espaço, isto é, o teste, que minimiza a soma $P(\text{Erro do tipo I}) + P(\text{Erro do tipo II})$ e calcule seu tamanho.

1.3. Assuma que a quantidade α seja aleatória e que a distribuição a priori para α seja uma exponencial de hiperparâmetro 1.

1.3.1. [5pts] Calcule a distribuição a posteriori de α; e

1.3.2. [5pts] Determine a regra de Bayes para α (considere a perda quadrática).

2. Seja $X_1, \cdots X_n$ uma amostra aleatória proveniente da distribuição de Pareto não padrão, de parâmetros de posição e escala μ e σ respectivamente e parâmetro de forma igual a 0, cuja distribuição acumulada apresenta a seguinte expressão

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)}{\sigma}\right\} & \text{se} \quad x > \mu \\ 0 & \text{se} \quad x \leq \mu \end{cases}.$$

2.1. Assuma $\mu = \mu_0$ conhecido.

2.1.1. [5pts] Obtenha o estimador de Máxima Verossimilhança para σ, σ^*_{MV}

2.1.2. [5pts] Verifique se a distribuição pertence a uma família exponencial.

2.1.3. [5pts] Verifique se existe um ENVUMV para σ.

2.1.4. [5pts] Apresente uma quantidade pivotal para σ e determine o $100 \times \gamma$ % intervalo de confiança para σ.

2.2. [5pts] Discuta agora o problema de estimação no caso paramétrico bidimensional, isto é, para (μ, σ) desconhecido.

3. Prioris e Posterioris, Riscos e Informação Amostral.

3.1. [7pts] Demonstre a seguinte proposição:

Considere a verossimilhança de x, $f(x|\theta) = h(x)e^{\theta x - \psi(\theta)}$. *Sejam* μ *e* λ *hiperparâmetros e* $k(\cdot,\cdot)$ *uma função conhecida. Definamos a distribuição a priori para* θ *por*

$$\pi(\theta|\mu,\lambda) = k(\mu,\lambda)\exp\{\theta\mu - \lambda\psi(\theta)\}.$$

A posteriori para θ *apresenta, então, a forma*

$$\pi(\theta|\mu + x, \lambda + 1) = k(\mu + x, \lambda + 1)\exp\{\theta(\mu + x) - (\lambda + 1)\psi(\theta)\}.$$

3.2. Assuma para x observado, uma verossimilhança gama (α,β), dada pela forma

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}.$$

3.2.1 [4pts] Determine, a familia de prioris conjugadas para a quantidade aleatória (α,β).

3.2.2 [5pts] Calcule a Informação de Fisher Conjunta, $I(\alpha,\beta)$, para x.

3.2.3 [4pts] Compare, assintoticamente, usando **todos os resultados teóricos que julgar convenientes (justifique)**, o estimador de máxima verossimilhança e o estimador de Bayes para (α,β).

3.3. [5pts] Considere a perda de Esscher $L(\theta,\delta) = \exp\{\gamma\theta\}(\theta - \delta)^2$,, em que γ é uma constante positiva. Se π representa uma determinada priori em θ, determine o estimador de Bayes δ^π, para a quantidade θ.

4. Para os itens 4.1-4.3, considere uma família exponencial de um parâmetro.

4.1. [7pts] Sob que condições, tal família de distribuições tem razão de verossimilhanças monótona? Demonstre sua afirmativa.

4.2. [3pts] Ilustre 4.1 por dois exemplos, em detalhes.

4.3. [5pts] Mostre que o teste definido por

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i > k, \\ \gamma & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i = k, \\ 0 & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i < k, \end{cases}$$

é um teste UMP de tamanho α para $H_0 : p \leq p_0$ vs $H_1 : p > p_0$, em que γ é tal que

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i > k | p = p_0) + \gamma P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k | p = p_0) = \alpha.$$

Considere, para os itens 4.4-4.5, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória $N(\theta, 1)$.

4.4. [5pts] Encontre o teste UMP para $H_0 : \theta < \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

4.5. [5pts] Mostre que não existe um teste UMP para $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

5. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $f(\cdot|\alpha, \beta)$ definida para $\alpha > 0$, $\beta > 0$ por

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha\beta^\alpha x^{\alpha-1} & \text{se} \quad 0 < x < \beta^{-1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

5.1. [8pts] Determine a estatística suficiente baseada na amostra $X_1, \cdots, X_n$ para (α, β). Fundamente sua resposta.

5.2. Considere nos itens 5.2.1 e 5.2.2 uma única observação, X, de

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\{-\beta/x\} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

5.2.1. [6pts] Demonstre que esta família corresponde a uma família exponencial $k-$paramétrica, apresente a forma canônica e descreva seu espaço natural canônico.

5.2.2. [6pts] Especifique a forma da estatística suficiente $T(X)$ para (α, β) (pode justificar por que existe T suficiente?). Apresente a forma da função geradora de momentos para $T(X)$ e determine $E(T(X))$.

5.2.3. [5pts] Deduza a forma da estatística suficiente T^* baseada na amostra $X_1, \cdots, X_n$, e em T.

Dica: Resolva 5.2.1 e 5.2.2 usando uma amostra X. A amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ deve ser considerada no item 5.2.3.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA
PROVA DE PROBABILIDADE

janeiro de 200[illegible]

- *A prova é composta de 6 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie cada questão em uma nova folha. Use só um lado de folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*
- *Tranquilidade e bom trabalho!*

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Mostre que:
   - Se $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, $\forall \omega \in \Omega$ e $P\big(\{\omega\}\big)$ é constante (ou seja, não depende de ω), então Ω é finito.
   - Para $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots$, mostre que se
   $$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A,$$
   então $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$, onde
   $$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$
   $$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

2. Defina os 4 tipos de convergência de v.a.
   (a) Convergência em probabilidade implica na convergência quase certa? Prove ou dê um contra-exemplo.
   (b) Convergência em L^p implica na convergência em probabilidade? Prove ou dê um contra-exemplo.
   (c) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que
   $$\mathbf{P}(X_n = 4n) = 1/5 \text{ e } \mathbf{P}(X_n = -n) = 4/5.$$
   Mostre que a sequência $X_1, X_2, \ldots$ não satisfaz Lei Forte dos Grandes Números.

3. Considere uma sequencia de variaveis aleatorias independentes X_n com distribuiçao uniforme no intervalo $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$. Determine se o Teorema Central do Limite é valido ou não. Justifique.

4. Considere uma urna e infinitas bolas numeradas $1, 2, 3, \ldots$ (que estão fora da urna). Considere o seguinte mecanismo que consiste de infinitas etapas $1, 2, 3, \ldots$:
Na primeira etapa se colocam as bolas de 1 a 10 e se tira a 10.
Na segunda etapa se colocam as bolas de 11 a 20 e se tira a 20.
Sucesivamente, na n-esima etapa se colocam as bolas de $10(n-1)+1$ a $10n$ e se tira a $10n$-esima.
A primeira etapa dura meia hora. A segunda 15 minutos. Assim, cada etapa dura a metade da anterior.

   (a) Descreva o conjunto A_n das bolas estao na urna depois de cada etapa.
   (b) Encontre $\liminf$ e $\limsup$ da sequencia definida no item anterior.
   (c) Quantas bolas ficaram na urna depois de uma hora?

5. Considere uma urna e infinitas bolas numeradas $1, 2, 3, \ldots$ (que estao fora da urna). Considere o seguinte mecanismo que consiste de infinitas etapas $1, 2, 3, \ldots$:
Na primeira etapa se colocam as bolas de 1 a 10 e se tira a 1.
Na segunda etapa se colocam as bolas de 11 a 20 e se tira a 2.
Sucesivamente, na n-esima etapa se colocam as bolas de $10(n-1)+1$ a $10n$ e se tira a n-esima.
A primeira etapa dura meia hora. A segunda 15 minutos. Assim, cada etapa dura a metade da anterior.

   (a) Descreva o conjunto B_n das bolas estao na urna depois de cada etapa.
   (b) Encontre $\liminf$ e $\limsup$ da sequencia definida no item anterior.
   (c) Quantas bolas ficaram na urna depois de uma hora?

6. Um avião tem 100 lugares na classe econômica e todas as 100 passagens foram vendidas. O primeiro passageiro que entrou estava distraído e escolheu um assento ao acaso. Os outros passageiros então se comportaram da seguinte maneira: se o assento marcado no cartão de embarque está livre, o passageiro se senta no assento marcado; se o assento marcado está ocupado, o passageiro não faz escândalo, mas tranquilamente escolhe um dos lugares vazios ao acaso e se senta lá. Mostre que

$$\mathbf{P}(\text{o último passageiro vai conseguir sentar no seu lugar}) = 1/2.$$

Dica: considere os eventos

$$A_k = \{\text{o primeiro passageiro se sentou no lugar de } k\text{-ésimo}\},$$

$k = 1, \ldots, 100$.