EXAME DE QUALIFICAÇÃO - TOPOLOGIA ALGÉBRICA - JULHO 2007

1) Sejam X, Y complexos C-W finitos, conexos, de dimensão n e com exatamente uma n-célula.

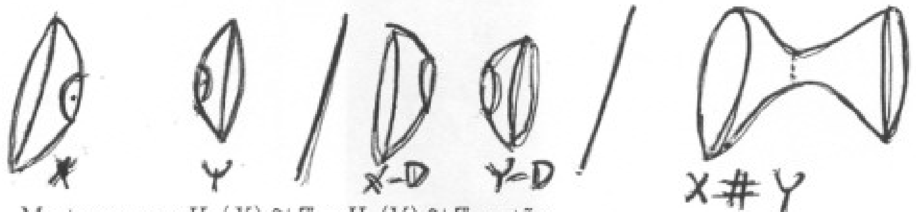
1a) (1/2 ponto) Mostre que $H_n(X)$ é zero ou é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

1b) (1 ponto) Mostre que se $H_n(X) = \mathbb{Z}$, então

$$H_{n-1}(X) \cong H_{n-1}(X_{n-1})$$

(X_k denota o k-esqueleto de X).

1c)(1 ponto) Dados X, Y como na questão (1b), definimos a soma conexa $X\#Y$ de X e Y como indicado na figura.



Mostre que se $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$ e $H_n(Y) \cong \mathbb{Z}$, então

$$H_k(X\#Y) \cong \begin{cases} H_k(X) \oplus H_k(Y), & 0 < k < n, \\ \mathbb{Z}, & k = 0, n. \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

1d) (2 pontos) Calcule a homologia e a cohomologia de $(RP^2 \times S^3)\#RP^5$ com coeficentes em $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Q}$. Pode usar qualquer teorema (Dualidade de Poincaré, coeficentes universais, etc.) sempre que esteja correta e claramente enunciado, e pode supor que $(RP^2 \times S^3)$ e RP^5 satisfazem as condições da questão 1.

2a) (1 ponto) Mostre que $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ é homeomorfo à garrafa de Klein K.

2b) (1/2 ponto) Use (2a) para mostrar que nem sempre

$$H_{n-1}(X\#Y) \cong H_{n-1}(X) \oplus H_{n-1}(Y)$$

para complexos CW n-dimensionais X e Y com 1 n-célula.

2c) (2 pontos) Use o Teorema de Van Kampen e (2a) para calcular $\pi_1(K)$. Verifique que $H_1(K)$ é o abelianizado de $\pi_1(K)$.

Sugestão para 2a e 2c: mostre que $\mathbb{R}P^2$ menos um disco aberto é homeomorfo à faixa de Möbieus

---

3) (2 pontos) Considere a variedade de Stiefel $V_{n,k}$ de conjuntos de k vetores ortonormais em $\mathbb{R}^n$. Mostre que os grupos de homotopia satisfazem $\pi_i(V_{n,k}) = 0$ para $i < k$.

$\mathbf{Z} \otimes G \simeq G$	$\mathbf{Z} * G = 0$
$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z},G) \simeq G$	$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z},G) = 0$
$\mathbf{Z}/m \otimes G \simeq G/mG$	$\mathbf{Z}/m * G \simeq \ker(G \xrightarrow{m} G)$
$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/m,G) \simeq \ker(G \xrightarrow{m} G)$	$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}/m,G) \simeq G/mG$

In particular, these rules imply the following, where $d = \gcd(m,n)$:

$\mathbf{Z}/m \otimes \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/m$	$\mathbf{Z}/m * \mathbf{Z} = 0$
$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/m,\mathbf{Z}) = 0$	$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}/m,\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/m$

$$\mathbf{Z}/m \otimes \mathbf{Z}/n \simeq \mathbf{Z}/m * \mathbf{Z}/n \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/m,\mathbf{Z}/n) \simeq \mathrm{Ext}(\mathbf{Z}/m,\mathbf{Z}/n) \simeq \mathbf{Z}/d$$

Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 13/07/2007

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

Faça a primeira questão e mais duas entre as 3 últimas.

1. a)(1pt) Justifique porque o anel $A = \mathbb{Z}[\sqrt[n]{5},\ \sqrt[m]{3}\,]$, com $2 \leq n, m \in \mathbb{N}$, é extensão inteira (ou integral) de $\mathbb{Z}$ e que todo ideal primo não nulo de A é maximal.

b) (1pt) Mostre que: Se R é um domínio noetheriano que tem dimensão de Krull igual a $\mathbf{d} \geq 1$ então

Todo ideal próprio não nulo é primário se e somente se R é local e $\mathbf{d} = 1$

c) (1pt) Sejam A um anel , M um A-módulo não nulo e $I \subset A$ um ideal próprio não nulo. Exiba uma condição suficiente sobre I para garantir que $M \otimes_A \frac{A}{I}$ seja isomorfo a M (ie, $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq M$). Justifique sua resposta.

d)(1pt) Dado um par, (d, n), de números naturais positivos encontre um anel de dimensão de Krull igual a d e com exatamente n ideais maximais. Justifique sua resposta.

2.(3pts) Sejam R um anel e

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\ \varphi\ } M \xrightarrow{\ \beta\ } M_2 \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-de módulos e R-homomorfismos. Mostre que:

a) Se existe um R-homomorfismo $\gamma : M_2 \longrightarrow M$ tal que $\beta \circ \gamma = I_{M_2} =$ identidade de M_2 então:

$$M = \varphi(M_1) \oplus \gamma(M_2) \qquad \text{e} \qquad \gamma \text{ é injetora.}$$

b) Se M_2 é livre de posto n (ie, M_2 tem uma base livre com n elementos ou equivalentemente $M_2 \simeq R^n$) então sempre existe $\gamma : M_2 \longrightarrow M$ tal que $\beta \circ \gamma = I_{M_2}$.

c) Se M_1, e M_2 são livres de postos, respectivamente, k e n então M é livre de posto m e $m = n + k$.

3.(3pts) Seja R um anel que satisfaz a seguinte condição:

$$(*) \qquad \text{Para todo } x \in R \text{ existe } n \in \mathbb{N},\ \ n > 1 \text{ tal que } x^n = x$$

a) Mostre que: Todo ideal primo de R é maximal.

b) Mostre que: O nilradical de R é nulo e que se R é noetheriano então R é isomorfo a um produto finito de corpos (i.e, existem corpos $K_1, \cdots, K_m$ tais que $R \simeq K_1 \times \cdots \times K_m$).

c) Exiba um exemplo de um anel A que satisfaz $(*)$ mas que **não** é noetheriano.

---

4. (3pts) Sejam $A = \mathbb{F}[X, Y, Z, W]$ e $B = \mathbb{F}[T_1, T_2, T_3]$ anéis de polinômios sobre o corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$. Considere $\varphi : A \longrightarrow B$ o $\mathbb{F}$-homomorfismo de anéis definido por $\varphi(f(X, Y, Z, W)) = f(T_1^4, T_1T_3T_2^3, T_2^4, T_3^2)$, (ie, φ restrito a $\mathbb{F}$ é a identidade, $\varphi(X) = T_1^4$, $\varphi(Y) = T_1T_3T_2^3$, $\varphi(Z) = T_2^4$ e $\varphi(W) = T_3^2$).

a) Calcule a dimensão de Krull do subanel C de B dado por: $C = \mathbb{F}[T_1^4, T_1T_3T_2^3, T_2^5, T_3^2]$

b) Mostre que: $K := Ker(\varphi) = (Y^4 - XW^2Z^3)$.

c) Mostre que: Se I é um ideal de A com $I + K \subset A$ e tal que $\frac{A}{I+K}$ é artiniano então $Z(I) \cap Z(K)$ é finito e não vazio, onde para $J \subset A$ ideal, $Z(J) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{F}^4;\ f(a, b, c, d) = 0\ \forall\ f \in J\}$.

Boa Prova

IMECC-UNICAMP-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO
ANÁLISE FUNCIONAL
DATA: 16/07/2007

(1) Seja $X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{R}) : \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n| < \infty\}$ munido da norma de $\ell^1(\mathbb{R})$.

(A) Mostre que X não é completo. (Sugestão: Mostre que X é um subespaço próprio e denso de $\ell^1(\mathbb{R})$).

(B) Seja $T : X \to \ell^1(\mathbb{R})$ a aplicação linear definida por $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (nx_n)_{n=1}^{\infty}$. Mostre que T é uma aplicação fechada e que não é limitada.

(C) Mostre que a aplicação inversa $S = T^{-1}$, $S : \ell^1(\mathbb{R}) \to X$ de T está bem definida, é limitada, sobrejetiva e que não é aberta.

(2) Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear tal que $f \circ T \in X^*$ para todo $f \in Y^*$, então T é limitado. (Notação: X^* e Y^* são respectivamente o dual topológico de X e Y)

(3) Mostre que um funcional linear definido em um espaço vetorial normado X é limitado se, e somente se, $f^{-1}(0)$ é um conjunto fechado.

(4) Seja X um espaço de Banach com norma $\|.\|$.
(A) Mostre que a bola unitária $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é fracamente fechada.

(B) Mostre que se $E \subset X$ é limitado na norma de X, então o fecho de E na topologia fraca também é um conjunto limitado.

(5) Seja $C[0,1]$ munido da norma do *sup*. Para cada um dos operadores lineares de $C[0,1]$ em $C[0,1]$ abaixo, diga se ele é compacto ou não, justifique:
(A) $Ax(t) = \int_0^t cos(s)\, x(s)\, ds$.

(B) $Bx(t) = t\, x(t)$.

(6) Considere o espaço $L^2(0,1)$ munido da norma usual. Definamos o operador linear de $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ por $Ax(t) = t\, x(t)$.
(A) Mostre que A é auto-adjunto.

(B) Quais são os espectros pontual, contínuo e residual de A?

Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 12/12/2007

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

Faça 8 (oito) entre as 10 (dez) questões abaixo.

1) Seja $A = \mathbb{Z}[T]$ o anel de polinômios em uma variável. Mostre que: O ideal $\mathbf{m} = (3, T^3 - T + 1)$ é maximal em A e que $K = \frac{A}{\mathbf{m}}$ é um corpo com 27 elementos.

2) Sejam A um anel e M um A-módulo. Mostre que: se $\varphi : M \longrightarrow M$ é um homomorfismo injetor de A-módulos e M é artiniano então φ é isomorfismo. Dê um exemplo de que tal resultado não é verdadeiro se M não for artiniano.

3) Sejam R um anel, $S \subset R$ um sistema multiplicativo e M um R-módulo finit. gerado. Mostre que: Se N é submódulo de M então $S^{-1}M = S^{-1}N$ se e só se existe $s \in S$ tal que $sM \subseteq N$. Conclua que dados $m_1, \cdots, m_r \in M$, $m_1, \cdots, m_r$ geram $S^{-1}M$ se e só se existe $s \in S$ tal que $sM \subseteq Rm_1 + \cdots + Rm_r$.

4) Sejam A um anel e M um A-módulo. Dizemos que M é indecomponível se satisfaz: $M = M_1 \oplus M_2$, com M_1 e M_2 A-submódulos se e somente se $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.Mostre que:
Se M é indecomponível e $\varphi : M \longrightarrow M$ é A-homomorfismo tal que $\varphi^2 = \varphi$ então $\varphi = 0$ ou $\varphi = I_M$, onde $I_M(m) = m$ para todo $m \in M$.

5) Sejam R um anel, M e P dois R-módulos e $f : M \times M \to P$ uma função bilinear e simétrica (ie, f é bilinear e $f(m,n) = f(n,m)$). Mostre que: Se K é o submódulo de $M \otimes_R M$ gerado pelo conjunto $\{m \otimes n - n \otimes m;\ \ m,n \in M\}$ então existe uma única função linear $\overline{f} : \frac{M \otimes_R M}{K} \to P$ tal que:

$$\text{Para todo par } m,n \in M, \quad \overline{f}(\overline{m \otimes n}) = f(m,n), \quad \text{onde } \overline{m \otimes n} = m \otimes n + K$$

6) Seja R um anel noetheriano tal que todo ideal maximal tem altura igual a $n \geq 1$. Mostre que:
Se $\mathcal{J}(R)$ é o radical de Jacobson de R, $S \subset R$ é um sistema multiplicativo e $S \cap \mathcal{J}(R) \neq \emptyset$ então $dim(S^{-1}R) < dim(R)$ (dim denota a dimensão de Krull do anel).

7) Sejam B um dominio Noetheriano que é extensão integral de $\mathbb{Z}[X]$ e $J \subset B$ é um ideal não nulo. Mostre que: Se $I = J \cap \mathbb{Z}[X]$ então I também é não nulo e mais ainda se altura de I é 2 então J tem uma única decomposição primária.

8) Sejam K um corpo e $S = K[X,Y,Z]$ o anel de polinômios a 3 variáveis sobre K. Mostre que:
Se J é o ideal, de S, dado por $J = (X^2 - Z, Y^2 - Z)$ e $R = \frac{S}{J}$ então dimensão de Krull de R é igual a 1.

9) Sejam K um corpo algebricamente fechado, $S = K[X_1, \cdots, X_n]$ o anel de polinômios a n variáveis sobre K e $I \subset S$ um ideal tal que $A = \frac{S}{I}$ é anel Artiano. Explique porque o conjunto

$$\vartheta(I) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in K^n;\ \ f(a_1, \cdots, a_n) = 0,\ \ \forall f \in I\}$$

é não vazio e finito.

10. Sejam $(R, \mathbf{m})$ um anel local e $v = (a_1, \cdots, a_n) \in R^n$ tal que $R = Ra_1 + \cdots + Ra_n$. Mostre que: existem $v_2, \cdots, v_n \in R^n$ tal que $\alpha = \{v, v_2, \cdots, v_n\}$ é um conjunto de geradores de R^n e que portanto α é base livre de R^n.

Boa Prova

IMECC-UNICAMP-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO
ANÁLISE FUNCIONAL
DATA: 14/12/2007

RA:

NOME:

(1) Seja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja C^0 o espaço vetorial real das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ munido da norma $\|.\|$ do supremo em $[0,1]$. Definamos $T : C^0 \to C^0$ por $(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$.

(A) Mostre que a aplicação T está bem definida.

(B) Mostre que o conjunto $Q = \{f \in C^0 : Tf = f\}$ é fechado.

(C) Seja $M > 0$ uma constante, mostre que o conjunto $P = \{Tf : \|f\| \leq M\}$ é compacto em C^0.

(D) Mostre que Q é um espaço vetorial de dimensão finita.

(2) Seja X um espaço vetorial real normado, completo e de dimensão infinita. Mostre que X não possui uma base (no sentido de um espaço vetorial) enumerável. (Sugestão: Use o lema de Baire.)

(3) Sejam $A, B : H \to H$ aplicações lineares definidas em um espaço de Hilbert real H com produto interno $\langle .,. \rangle$. Se $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ para todo $x, y \in H$. Mostre que A e B são limitados.

(4) Seja X um espaço vetorial real normado e seja V um subespaço vetorial de X. Se $F : V \to \mathbb{R}^N$ é uma aplicação linear e limitada, mostre que existe uma extensão $T : X \to \mathbb{R}^N$ que é linear e limitada.

(5) Seja $1 < p < \infty$ e $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definamos a seqüência $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\left(\varphi(\frac{1}{n}), \varphi(\frac{2}{n}), ..., \varphi(\frac{n}{n}), 0, 0, ...\right)$.

(A) Mostre que a_n converge fracamente para 0 em ℓ^∞.

(B) Mostre que a_n converge na norma de ℓ^p para zero se, e somente se, $\varphi = 0$.

(6) Seja $A : Y \to Y$ um operador linear contínuo definido num espaço de Banach complexo Y com norma $\|.\|$. Mostre que $\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ se, e somente se, existe uma seqüência $h_n \in Y$ com $\|h_n\| = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda)h_n\| = 0$. (Observação: $\sigma_p(A)$ e $\sigma_c(A)$ denotam, respectivamente, o espectro pontual e contínuo do operador A.)

Introdução à Topologia Algébrica
Exame de qualificação - Dezembro 2007

NOME:

RA:

1a) Considere o complexo C-W X definido no desenho: a união de um ponto $S^1 \vee S^1$, adjuntando duas 2-células, una delas pela função $z \mapsto z^2$ e a outra por $z \mapsto z^3$.

Calcule o grupo fundamental, o complexo de cadeias CW, a homologia e cohomologia com coeficentes em $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Q}$. Calcule o anel de cohomologia.

1b) Sejam $Y = S^2 \cup T$, onde S^2 é a esfera unitária em R^3 e T é o segmento de reta $\{(0,0,z) \,|\, |z| \leq 1$, e seja Z a união de um ponto $S^2 \vee S^1$. Mostre que Y e Z são homotópicamente equivalentes.

2a) Enuncie o Teorema do Ponto Fixo de Browder para funções $f : D^n \to D^n$. Demonstre-lo aplicando teoria do grau ã função que leva ambos os hemisférios ao hemisfério norte pela aplicação f.

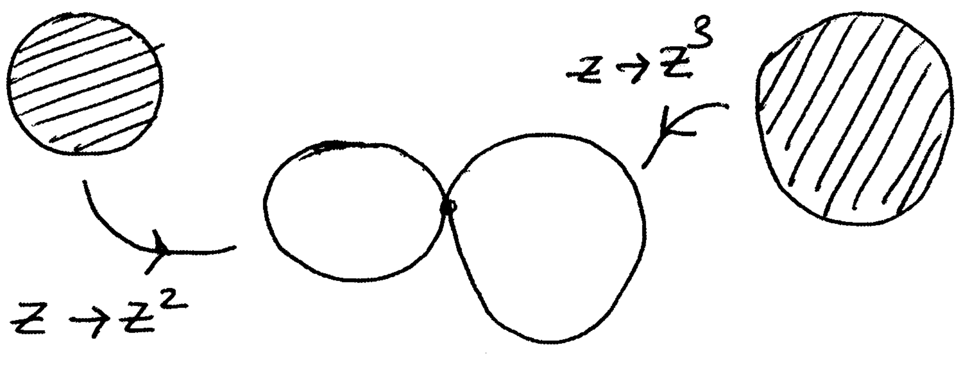
2b) Mostre que duas reflexões de S^n a través de hiperplanos são homotópicas usando teoria do grau. Mostre explicitamente (usando fórmulas), que ista homotopia pode ser construida de fato a través de reflexões.

---

3) Sejam

$$\begin{aligned} V_{k,n} &= \{(v_1, \dots v_k) \in (R^n)^k \,|\, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}, \text{ a variedade de Stiefel} \\ Gr^+_{k,n} &= \{k - \text{planos orientados en } R^n\}, \text{ a variedade de Grassmann orientada} \\ SO(n) &= \{A \in \text{ matrizes } n \times n \,|\, A^T A = AA^T = Id., \det(A) > 0\} \text{ o grupo ortogonal especial} \end{aligned}$$

Discorra sobre as relações entre os grupos de homotopia destes espaços. Em particular, entre os diferentes $V_{k,n}, V_{k',n}$, e quando $k = 1$ que é a esfera S^{n-1}. Observação: a intenção da orientação da variedade de Grassmann é simplificar a questão. Por que simplifica?



Geometria Riemanniana
Exame de qualificação - Dezembro 2007

NOME:

RA:

1a) Enuncie o Teorema do Índice.

1b) Prove usando o teorema do Índice que o índice λ de uma geodésica γ é $< \infty$. Prove o mesmo resultado, sem usar o Teorema do Índice. (sugestão: veja que $\Omega_\gamma = V_1 \oplus V_2$, com $E''(\gamma)$ positiva definida sobre V_2 e $\dim_R V_1 < \infty$.

---

2) Sejam X, Y subvariedades sem fronteira de uma variedade Riemanniana M, e seja γ uma geodésica tal que $\gamma(0) \in X$, $\gamma(1) \in Y$, e γ é a curva mais curta unindo X e Y. Mostre que $\gamma'(0) \perp T_{\gamma(0)}X$ e $\gamma'(1) \perp T_{\gamma(1)}Y$.

---

3) Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que existe una métrica biinvariante para G e que a curvatura seccional de G para esta métrica é ≥ 0.

---

4) De exemplo de uma variedade completa de curvatura seccional 1 que não seja a esfera padrão. De exemplo de uma variedade completa de curvatura seccional 0 que não seja R^n.