IMECC-UNICAMP-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$
DATA: 16/07/2007

(1) Determine o conjunto de pontos p de $\mathbb{R}^3$ com a seguinte propriedade: existe vizinhança $V_p \subset \mathbb{R}^3$ de p tal que a superfície $x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$ pode ser representada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = g(x, y)$.

(2) Seja $\wp$ um planeta com órbita elíptica $x = acos\theta$, $y = bsen\theta$. Supondo que o sol está situado no foco $((a^2 - b^2)^{1/2}, 0)$ e que t é o tempo medido desde o instante que o planeta passa pelo ponto $(a, 0)$, então a equação de Kepler satisfeita é: $kt = \theta - \varepsilon sen\theta$, em que $k > 0$ é uma constante e $\varepsilon = b/a$ com $0 < b < a$.
(A) Mostre que a equação de Kepler pode ser resolvida para θ em função de t.

(B) Mostre que $\frac{d\theta}{dt}$ assume o máximo no periélio $(a, 0)$ e o mínimo no afélio $(-a, 0)$.

(3) Defina uma parametrização $f : X \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ em que X é um retângulo de dimensão 4 e cuja imagem seja $S^2 \times S^2$. Calcule o volume de $S^2 \times S^2$.

(4) Seja ω uma k-forma diferencial de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_M \omega = 0$ para toda variedade compacta, fechada e orientável M de dimensão k em $\mathbb{R}^n$. Use o Teorema de Stokes para explicar por que ω é fechada.

(5) Se ω é uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, mostre que ela é exata.
(Sugestão: Dado $q \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, defina $g(q)$ como sendo a integral de ω ao longo do caminho γ_q que compreende o arco do círculo máximo em S^2, do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $\frac{q}{|q|}$ e do segmento de reta entre o ponto $\frac{q}{|q|}$ e o ponto q. Aplique o Teorema de Stokes para mostrar que $g(q)$ é independente do círculo máximo escolhido e mostre que $df = \omega$)

(6) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Dada uma curva regular $\Gamma \subset f(S^2)$, mostre que para cada $p \in \Gamma$ existe uma vizinhança aberta $W \subset \mathbb{R}^4$ de p tal que $\Gamma \cap W$ é imagem de uma curva regular em S^2.

Exame de Qualificação: Topologia

18/07/2007

1. 1) Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Provar que f é fechada se e somente se $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ para todo $A \subset X$.

   2) Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Provar que f é contínua se e somente se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.

2. 1) Sejam X um espaço topológico regular e $A \subset U \subset X$ com A compacto e U aberto. Provar que existe um aberto V tal que $A \subset \overline{V} \subset U$.

   2) Sejam X um espaço topológico completamente regular e $A \subset U \subset X$ com A compacto e U aberto. Prove que existe $g : X \to [0,1]$ contínua tal que $g \mid A \equiv 1$ e $g \mid X - U \equiv 0$. Lembramos que um espaço topológico é completamente regular se para $x \in U$ (U aberto) existe uma função contínua tal que $f(x) = 1$ e $f \mid X - U \equiv 0$.

   3) Seja X um espaço topológico regular tal que toda cobertura por abertos tem uma sub-cobertura enumerável. Provar que X é normal.

3. Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $F : X \to X$ uma aplicação que preserva distância. Provar que $F(X) = X$.

4. 1) Seja $\prod X_\alpha$ um produto de espaços topológicos e $x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha$. Provar que
$$C(x) = \prod C(x_\alpha)$$
   onde $C(y)$ é a componente conexa que contem a y.

   2) Sejam X, Y espaços topológicos. Provar que se X e Y são compactos então $X \times Y$ é compacto. Não pode assumir o teorema de Tychonoff.

5. Prove que não existe uma retração contínua $r : X \to A$ nos seguintes casos:

   a) $X = S^1 \times D^2$ com seu bordo $A = S^1 \times S^1$.

   b) $X = D^2 \vee D^2$ com seu bordo $A = S^1 \vee S^1$.

6. Sejam X, Y espaços topológicos e $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Assumindo que Y é conexo e que para todo $y \in Y$, $p^{-1}(\{y\})$ é conexo. Prove que X é conexo.

MM719 - 1S 2007 - Exame de Qualificação

Nome: ____________________________________ RA: __________ 13/07/2007

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Bom trabalho!

1. (20pts) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z, w) = (3z - w, 2x + 2y - 4z + 2w, z + w, 3w - z).$$

   Encontre a forma de Jordan de T e uma base de Jordan.

2. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando suas respostas.

   (a) (05pts) Se T é um endomorfismo diagonalizável de um espaço vetorial real V de dimenão finita, então existe um produto interno em V para o qual T é auto-adjunto.

   (b) (05pts) Se T é um operador ortogonal em $\mathbb{R}^n$, então existe uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T.

   (c) (05pts) Suponha que o espaço vetorial V seja a soma direto dos subespaços U e W. Se N é um subespaço de V, então $N = (N \cap U) \oplus (N \cap W)$.

   (d) (05pts) Se $\mathbb{K}, \mathbb{F}$ são corpos satisfazendo $\mathbb{K} \subsetneq \mathbb{F}$, então para todo $\mathbb{F}$-espaço vetorial V temos $\dim_{\mathbb{K}}(V) > \dim_{\mathbb{F}}(V)$. (A notação $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ significa a dimensão de V quando visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, onde as operações são as mesmas vindas da estrutura de V como espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.)

3. (10pts) Dê um exemplo de espaço vetorial que não é isomorfo ao seu dual.

4. (10pts) Suponha que $T : V \to V$ seja uma transformação linear satisfazendo $T^2 = 2T + 3I_V$. Quais são os possíveis autovalores de T? (Aqui V é espaço vetorial sobre um corpo de característica zero)

5. (20pts) Seja $\{T_i : i \in \mathcal{I}\}$ um subconjunto de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$. Suponha que $T_iT_j = T_jT_i$ para todo $i, j \in \mathcal{I}$. Mostre que V pode ser escrito como soma direta de auto espaços generalizados comuns a todos os $T_i, i \in \mathcal{I}$.

6. (20pts) Considere a forma quadrática no $\mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 3xz + yz$. Calcule a matriz de f na base $\{(3, 01), (1, -1, 2), (2, 1, 2)\}$.

7. (20pts) Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. Mostre que existe uma função linear injetora $\varphi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ e que, se V tiver dimensão finita, existe φ bijetora.

Topologia
Exame de qualificação - Dezembro 2007

NOME:

RA:

---

(1) Prove as seguintes afirmações:
   (a) Seja $\mathfrak{C}$ uma familia não vazia de subconjuntos de um conjunto X tal que $X = \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U$. Então a familia das intersecções finitas de membros de $\mathfrak{C}$ é uma base de uma topologia de X.
   (b) Seja X um espaço topológico que verifica o segundo axioma de enumerabilidade. Então toda cobertura por abertos de um subconjunto arbitrário tem uma subcobertura enumerável.

(2) Prove que o conjunto das seqüencias de números reais $\mathbb{R}^\omega$ com a topologia produto é conexo e com a topologia caixa (uma base desta topologia são os produtos arbitrários de abertos) não é conexo. Dica: Considere os conjuntos das sequencias limitadas e o das sequencias não limitadas.

(3) Seja $\{X_a : a \in A\}$ uma familia de espaços topológicos. Prove o disprove as seguintes afirmações:
   (a) $\prod_{a \in A} X_a$ é Hausdorff, se para cada $a \in A$ os X_a são Hausdorff.
   (b) $\prod_{a \in A} X_a$ verifica o primeiro axioma de enumerabilidade se e somente se para cada $a \in A$ os X_a verificam o primeiro axioma e todos a menos de uma quantidade enumeravel deles tem a topologia indiscreta.

(4) Sejam X e Y espaçõs topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação fechada tal que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ é compacto. Prove que f é uma aplicação propria.

(5) Prove as seguintes afirmações:
   (a) Seja $\phi_t : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uma homotopia continua. Então os homomorfismos induzidos $(\phi_t)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ são todos iguais.
   (b) Seja $f : S^1 \times [0,1] \to S^1$ continua que verifica: 1) $f(x, 0) = x$ para todo $x \in S^1$ e 2) existe $x_0 \in S^1$ tal que $f(x_0, t) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$. Então as aplicações $f_t : S^1 \to S^1$ definidas por $f_t(x) = f(x,t)$ são sobrejetoras.
   (c) $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

IMECC-UNICAMP-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$
DATA: 14/12/2007

RA:

NOME:

(1) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva tal que $\int_0^1 f(t)dt = 3$.

(A) Mostre que existe um único ponto $y \in [0,1]$ tal que $\int_0^y f(t) = 2$.

(B) Mostre que para cada x em um intervalo $[0,\delta]$ com $0 < \delta \leq 1$, existe um único ponto $\xi(x) \in [0,1]$ tal que $\int_x^{\xi(x)} f(t) = 2$.

(C) Mostre que a função $\xi : [0,\delta] \to [0,1]$ definida no item (B) é de classe C^1.

(D) Calcule a derivada de ξ.

(2) Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k, $k \geq 1$ uma função tal que $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

(A) Mostre a função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(x) = x + g(x)$ é um difeomosfismo de classe C^k sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

(B) Mostre que se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, então a função f definida no item (A) é sobrejetiva.

(C) Exiba um contra-exemplo que mostre que não basta supor que $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ para garantir que f definida no item (A) seja sobrejetiva.

(3) Mostre que uma submersão injetora é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

(4) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente crescente, a função inversa de f é diferenciável?

(5) Seja $w = f\,dx$ uma $1-$forma no intervalo $[0,1]$ em que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua. Mostre que existe um único número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $w - \lambda\,dx = dg$ para alguma função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfazendo $g(0) = g(1)$.

(6) Encontre uma $2-$forma w em $\mathbb{R}^3$ tal que $dw = dx \wedge dy \wedge dz$.

(7) Sejam $w = xz\,dx + yz\,dy - z^2\,dz$ uma $1-$forma em $\mathbb{R}^3$ e H o hiperbolóide $x^2+y^2-z^2 = 1$. Mostre que se $M \subset H$ é uma superfície difeomorfa a S^1, então $\int_M w = 0$.

MM719 - 2S 2007 - Exame de Qualificação

Nome: ______________________________ RA: __________ 12/12/2007

Escolher questões cujo total de pontos possíveis seja 100. Bom trabalho!

1. Escreva as definições dos seguintes conceitos:
   (a) (05pts) Polinômio mínimo de um operador linear.
   (b) (05pts) Operador hermitiano.
2. (05pts) Enuncie o teorema de Cayley-Hamilton.
3. (10pts) Suponha que V seja um espaço vetorial de dimensão 5 sobre um corpo algebricamente fechado e que $T : V \to V$ seja uma aplicação linear com polinômio mínimo igual a $p(x) = (x-a)(x-b)^2$. Liste as possíveis formas canônicas de Jordan de T.
4. (15pts) Seja V seja um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to V$ uma transformação linear com polinômio mínimo $p(x) = (x-a)^n$ para algum $a \in \mathbb{K}$. Descreva um método para encontrar uma base de Jordan para T.
5. (10pts) Mostre que se W é um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial V com produto interno temos $V = W \oplus W^{\perp}$.
6. (15pts) Seja $f(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$. Encontre uma transformação ortogonal das variáveis que leva f a eixos principais e calcule o índice de f.
7. Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando suas respostas.
   (a) (05pts) Se α e β forem bases de V e $T : V \to V$ é linear, $\det([T]_\alpha^\alpha) = \det([T]_\beta^\beta)$.
   (b) (05pts) Exitem matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tais que $AB - BA = I$.
   (c) (05pts) Se T é um endomorfismo diagonalizável de um espaço vetorial complexo V de dimenão finita, então existe um produto interno hermitiano em V para o qual T é auto-adjunto.
   (d) (05pts) Para todo espaço vetorial V de dimensão finita existe um isomorfismo linear $\varphi : V^* \otimes V \to \mathrm{End}(V)$.
8. (15pts) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ e G a matriz $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Mostre que $\det(G) \geq 0$ e estabeleça uma condição necessária e suficiente para que a igualdade ocorra.
9. (20pts) Suponha que $T, S : V \to V$ sejam operadores lineares sobre um espaço vetorial real V de dimensão finita satisfazendo $TS = ST$. Se $p(x)$ é um fator irredutível do polinômio característico de T, mostre que o espaço $V_p = \{v \in V : (p(T))^k(v) = 0 \text{ para algum } k > 0\}$ é um subespaço S-invariante não trivial.