1. Mostre que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ se, e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(|X| > n) < \infty$.

2. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes $U(-n, n)$, defina $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Vale o TCL para S_n?

3. Sejam $U_1, U_2, \ldots$ v.a.'s independenes $U(0,1)$. Defina uma v.a. X por

$$X + 1 = \min\{n \text{ tal que } \prod_{i=1}^{n} U_i < e^{-\lambda}\}, \quad \prod_{i=1}^{0} U_i = 1.$$

Mostre que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ e N v.a's tais que condicionalmente ao evento $N = n$, as v.a.'s $X_1, X_2, \ldots$ são independentes e $X_j | N = n \sim N(j/n, \sigma^2/n)$. Defina $S_N = X_1 + \ldots X_N$. Ache a função característica de S_N.
Obs.: Se $Z \sim N(0,1)$, sua função característica é $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ e $Y_1, Y_2, \ldots$ sequências de v.a's e constantes $c \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, e $\sigma_0, \sigma > 0$, tais que

$$\sqrt{n}\left(\frac{Y_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \quad \text{e} \quad \sqrt{n}\left(\frac{X_n - c}{\sigma_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Prove que

$$c\sqrt{n}\left(\frac{Y_n - \mu}{\sigma X_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

AI. Considere uma amostra de tamanho n de uma variável aleatória X cuja função de densidade seja dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x),$$

em que $\theta > 0$.

[05] a) Obtenha o EMV para θ^2;

[06] b) Encontre um teste UMP de nível α_0 para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

[07] c) Obtenha um ENVUMV para θ;

[07] d) Para uma amostra de tamanho 1, assuma priori $\theta \sim U(0,1)$ e encontre o estimador de Bayes com relação á função-perda $L(\theta, d) = \theta^2(d-\theta)^2$.

AII. Suponha que o tempo de falha de um equipamento eletrônico tenha distribuição Weibull deslocada com densidade

$$f(x/\alpha, \phi, a) = \tfrac{\alpha}{\phi}(x-a)^{\alpha-1}e^{-(x-a)^{\alpha}/\phi}I_{[a,\infty)}(x),$$

em que α, ϕ e a são nao-negativos. Suponha que α e a sejam conhecidos e considere $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de X, tamanho n.

[06] a) Encontre um teste UMP de nível α_0 para as hipóteses $H_0 : \phi = \phi_0$ vs $H_1 : \phi > \phi_0$.

[07] b) Obtenha um teste envolvendo a estatística $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^{\alpha}/n$, para as hipóteses do item a). Suponha que n seja grande e utilize a distribuição normal com nível aproximado de α_0. Qual é sua conclusão se $S = 2$, $\alpha_0 = 0,05; \phi_0 = 1$ e $n = 100$?

[07]c) Com base no teste obtido em b), qual é o menor tamanho de amostra para que o poder do teste seja maior do que ou igual a 0,95, se $\phi = 2$?. Considere $\alpha_0 = 0,05; \phi_0 = 1$ e $\alpha = 1$. Note que $P(Z < 1,64) = 0,95$.

[05]d) Para $a = 0$, determine um ENVUMV para ϕ. A variância deste estimador atinge o LIDCR?. justifique.

AIII. Seja X uma variável aleatória com função de massa, $p_X(x|\theta) = P(X = x|\theta)$, dada por

$$p_X(x|0) = \begin{cases} \alpha/2 & \text{se } x = \pm 2, \\ 1/2 - \alpha & \text{se } x = \pm 1, \\ \alpha & \text{se } x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

se $\theta = 0$, e

$$p_X(x|\theta) = \begin{cases} \theta c & \text{se } x = -2, \\ \frac{1-c}{1-\alpha}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) & \text{se } x = \pm 1, \\ \alpha\left(\frac{1-c}{1-\alpha}\right) & \text{se } x = 0, \\ (1-\theta)c & \text{se } x = 2, \end{cases} \tag{2}$$

para qualquer $0 < \theta < 1$, sendo α e c constantes restritas a $0 < \alpha < 1/2$ e $\alpha/(2-\alpha) < c < \alpha$.

Considere nos itens (a)-(c) o problema de testar-se $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta > 0$.

[05] a) Encontre o teste de razão de verossimilhança de tamanho α para H_0 vs H_1.

[06] b) Mostre que o teste encontrado em (a) é inferior (em termos de poder) ao teste trivial $\phi(\cdot) = \alpha$.

[07] c) Encontre a função-poder do teste dado por $\phi_\star(x) = 1$ se e somente $x = 0$. Mostre que tal teste é superior ao TRV (em termos de poder) encontrado em (a).

[07] d) Suponha que se queira testar $H_2 : \theta = 1/4$ (nula) vs $H_3 : \theta = 1/2$ (alternativa). Ache um teste UMP e encontre seu tamanho e poder.

BI. Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma Uniforme $U(a\theta, b\theta)$, sendo $\theta > 0$ e as constantes a e b conhecidas tais que $a \leq 0 < b$. Considere, quando necessário, uma priori para θ dada por $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta)$.

[06] a) Obtenha um ENVUMV para θ, se $a = -1$ e $b = 1$;

[06] b) Obtenha o estimador de θ pelo método dos momentos;

[07] c) Para uma amostra de tamanho 1, $a = 0$ e $b = 1$, mostre que a distribuição à posteriori de θ é dada por $\pi(\theta|x) = e^{-(\theta - x)} I_{(x,\infty)}(\theta)$. Além disso, encontre o estimador de Bayes considerando a perda quadrática;

[06] d) Considere agora uma perda do tipo 0-1 para as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \leq 1 \quad vs \quad H_a : \theta > 1$$

e a função de decisão que rejeita a hipótese nula se $x > 3/4$. Encontre: a função-risco e o risco de Bayes dessa função de decisão, para uma amostra de tamanho 1, $a = 0$ e $b = 1$.

BII. Para estudar o número de carros que passam por certa avenida da cidade, é considerada a distribuição de Poisson. Sabemos que pelo menos um carro passa em cada período observado.
[04] a) Mostre que, baseado nas suposições, o seguinte modelo probabilístico é adequado:

$$P(X = k) = \frac{\theta^k}{(e^\theta - 1)k!}, \quad k = 1, 2, 3....$$

[07] b) Determine o estimador de θ pelo método dos momentos;

[07] c) Para uma amostra de tamanho 1, mostre que um estimador não tendencioso para $\tau(\theta) = 1 - e^{-\theta}$ é dado por

$$T(X) = \begin{cases} 0, & \text{se X é impar} , \\ 2, & \text{se X é par} \end{cases}$$

Observe que $e^\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!}$ e $e^{-\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^k}{k!}$;

[07] d) Para $n \geq 2$, obtenha um estimador $\widehat{\theta}$ de θ tal que $E(\widehat{\theta}) = \theta$. O estimador obtido é um ENVVUM para θ?. Se não, diga como obter você obteria um ENVVUM para θ. Justifique.

BIII. Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ independentes com respectivas distribuições $N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de forma que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > 0$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.
[04] a) Ache uma estatística suficiente para $(\alpha, \beta, \sigma^2)$;

[05] b) Ache o estimador por máxima verossimilhança de $(\alpha, \beta, \sigma^2)$;

[08] c) Suponha que $\beta = 0$. Teste $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha = \alpha_0$, usando a estatística escore, Q_S. Mostre que sob H_0 $Q_S \to^D \chi_1^2$, quando $n \to \infty$;

[08] d) Suponha α e β conhecidas. Construa o mais curto intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para σ^2. Suponha, em seguida, $n = 1$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $x = 2$ e $y = 13$. Construa o mais curto intervalo de 95% de confiança para σ^2.