Examé de Qualificação: Topologia

18/12/2006

Cada item vale 1 ponto.

1. 1) Sejam X, Y espaçõs topologicos e $f : X \to Y$ sobrejetora e fechada. Suponha que Y é conexo e que $f^{-1}(y)$ é conexo para todo $y \in Y$. Provar que X é conexo.

   2) Seja X um espaço topologico conexo, $f, g : X \to [0,1]$ funções continuas e f sobrejetora. Provar que existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.

2. 1) Seja X um conjunto não enumeravel e $p \in X$. A topologia de Fort com respeito a p é dada por:

   $$\mathfrak{T} = \{U \subset X : X - U \text{ é finito ou } p \in X - U\}.$$

   Provar que $(X, \mathfrak{T})$ é Hausdorff e não é metrizavel.

   2) Sejam los subespaços de $\mathbb{R}$ com a topologia induzida:

   $$X = [0,1) \cup \{2\} \cup (3,4) \cup \{5\} \cup (6,7) \cup \{8\} \cup \ldots$$

   e

   $$Y = [0,1] \cup \{2\} \cup (3,4) \cup \{5\} \cup (6,7) \cup \{8\} \cup \ldots$$

   Provar que X e Y não são homeomorfos e que existem bijeções continuas de X em Y e de Y em X.

3. 1) Prove que todo espaço compacto, Hausdorff é normal.

   2) Seja (X, d) um espaço metrico compacto. Provar que se $\mathfrak{U}$ é uma cobertura por abertos de X, existe um $\lambda > 0$ tal que todo $A \subset X$ com $diam(A) < \lambda$ esta contido em algúm elemento de $\mathfrak{U}$.

4. 1) Prove que $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n \neq 2$.

   2) Prove que o circulo S^1 não é um retrato do disco unitario fechado.

5. 1) Seja $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ uma aplicação de recobrimento, Y um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ continua. Prove que existe $F : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ continua tal que $p \circ F = f$ se e somente se

   $$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_* \pi_1(E, e_0)$$

   2) Seja Y um espaço conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos tal que $\pi_1(Y)$ é finito. Prove que toda aplicação continua $f : Y \to S^1$ é homotopica a uma aplicação constante.

Exame de Qualificação ao Mestrado
Álgebra Linear, 10 de julho de 2006

A resolução completa de cada exercício vale 2 (dois) pontos.

1. A transformação linear $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ atua sobre os vetores e_1, e_2, e_3, e_4 da base canônica de $\mathbb{C}^4$ como segue:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_1 + 2e_2 + e_3, & T(e_2) &= 2e_1 - e_2 + e_4, \\ T(e_3) &= -4e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4, & T(e_4) &= 4e_1 - 8e_2 - 2e_3 + 3e_4. \end{aligned}$$

a) Encontrar a matriz A de T na base canônica de $\mathbb{C}^4$.
b) Encontrar a forma canônica de Jordan J de A.
c) Encontrar uma base de $\mathbb{C}^4$ onde a matriz de T é igual a J.

2. Seja $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$. Encontrar uma transformação ortogonal das variáveis que leva f a eixos principais.

3. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_k$ vetores não nulos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ tais que o ângulo entre quaisquer u_i e u_j, $i \neq j$, é igual a θ, $90° < \theta < 180°$. Mostrar que $k \leq n + 1$.

4. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justificar as suas respostas. (Resposta sem a devida justificativa não sera considerada.)

a) Se A é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são números inteiros e cujo determinante é igual a 1, então A é invertível e A^{-1} também tem todas as suas entradas números inteiros.

b) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A^k = I$ para algum k e $|\text{traço}\,(A)| = n$ então $A = I$. (Aqui I é a matriz identidade $n \times n$.)

c) Se T_1 e T_2 são dois operadores normais em $\mathbb{C}^n$ então $T_1 + T_2$ também o é.

d) Existem matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tais que $AB - BA = I$.

e) Seja $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função bilinear e alternada. Então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = a(x_1y_2 - x_2y_1)$, para quaisquer $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

5. Seja S um conjunto não vazio de operadores auto-adjuntos em $\mathbb{R}^n$ tais que $T_1T_2 \in S$ para todos T_1, $T_2 \in S$. Mostrar que existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que consiste de autovetores de todo $T \in S$.

Boa prova!

Exame de qualificação ao mestrado em matemática
Álgebra Linear, 13/12/2006

1. (2,5 pt) Seja $V = \mathbb{C}^4$ com a base canônica e_1, e_2, e_3, e_4 e seja $T: V \to V$ com

$$T(e_1) = 4e_1 + 4e_2, \quad T(e_2) = -4e_1 - 4e_2, \quad T(e_3) = -2e_2 + 4e_3 + 2e_4, \quad T(e_4) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3.$$

a) Mostrar que existe um único operdor linear $T: V \to V$ que atua nos vetores da base canônica na maneira descrita acima, e escrever a matriz de T.

b) Encontrar uma base de Jordan para T e a matriz de T nessa base.

2. (2 pt) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz de posto 1 e seja $n > 1$.

a) Mostrar que $A^2 = pA$ para algum número complexo p.

b) Mostrar que se $p = -1$ então a matriz $I_n + A$ não é invertível.

c) Mostrar que se $p \neq -1$ então $I_n + A$ é invertível e encontrar a sua inversa. (Dica: Procure essa inversa da forma $I_n + qA$.)

3. (1 pt) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, $\dim V = n$, e sejam f, $g \in V^*$, o espaço dual de V. Mostrar que se $\ker f = \ker g$ então f e g são linearmente dependentes em V^*. (Aqui $\ker f$ é o núcleo da transformação f.)

4. (2 pt) Seja $f = -x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4xy - 4xz - 8yz$ uma forma quadrática nas variáveis x, y e z sobre $\mathbb{R}$. Encontrar uma transformação *ortogonal* das variáveis x, y, z, que reduz f em forma canônica (eixos principais).

5. (2,5 pt) a) Definir *produto interno hermitiano* no espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$. Definir *isometria* em V.

b) Seja $V = \mathbb{C}^n$ com o produto interno usual (u, v) e sejam $v_1, \ldots, v_k$ e $w_1, \ldots, w_k$ dois sistemas de vetores em V. Se T é isometria de V tal que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, k$, mostrar que $(v_i, v_j) = (w_i, w_j)$ para todos i e j.

c) Nas notações de (b), mostrar que se $(v_i, v_j) = (w_i, w_j)$ para todos i e j, então existe uma isometria T de V tal que $T(v_i) = w_i$ para todo i.

6. (1 pt) Seja $E = E(V)$ a álgebra exterior do espaço V sobre $\mathbb{R}$, $\dim V = 2006$, e sejam f_1, f_2, $f_3 \in E$. Mostrar que $(f_1 \wedge f_2 - f_2 \wedge f_1) \wedge (f_1 \wedge f_3 - f_3 \wedge f_1) = 0$ em E.

Boa Prova!

TOPOLOGIA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO
JULHO 2006

1) Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma familia de espaços topológicos. Sejam $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$. Provar as seguintes afirmações:

a) (1 pt.) $\overline{(\Pi_{i\in I} A_i)} = \Pi_{i\in I} \overline{A_i}$.

b) (1 pt.) $(\Pi_{i\in I} A_i)^o \subset \Pi_{i\in I} A_i^o$.

c) (1 pt.) Mostre um exemplo onde $(\Pi_{i\in I} A_i)^o \neq \Pi_{i\in I} A_i^o$.

2) (2 pt.) Sejam X um espaço compacto e Y um espaço Hausdorff e $f : X \to Y$ continua e sobrejetora. Mostre que f é aberta.

3) a) (1 pt.) Prove que o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ é finito.

b) (1 pt.) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento e $f : X \to B$. Sob quais condições existe um levantamento de f ?. Isto é, uma função $\widetilde{f} : X \to E$ tal que $f = p \circ \widetilde{f}$.

c) (1 pt.) Prove que toda aplicação continua de $\mathbb{RP}^2$ em S^1 é homotopica a uma aplicação constante.

4) (2 pt.) Sejam $A \subset \mathbb{R}^k$ fechado e $f : A \to \mathbb{R}^n$ continua $(k, n \geq 1)$. Provar que existe uma extensão continua de f a todo $\mathbb{R}^k$.

IMECC-UNICAMP-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$
DATA: 12/07/2006

(1) A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ é diferenciável no ponto $(0,0)$?

(2) Seja $M(n \times n) = \mathbb{R}^{n^2}$ o espaço das matrizes $n \times n$ com elementos reais. Mostre que o máximo da função $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = det(x)$ restrita à esfera $\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2 = n$ é atingido numa matriz ortogonal e vale 1.

(3) Mostre que toda submersão $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ $(k > n)$ é uma aplicação aberta, isto é, se $A \subset U$ é aberto, então $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

(4) Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua no bloco $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que o gráfico de f tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

(5) (A) Calcule a integral de superfície $\int_S x^2 d\sigma$, onde S é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

(B) Encontre uma curva fechada e sem auto-interseções C de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ de maneira que a integral $\int_C (y^3 - y)dx - 2x^3 dy$ seja máxima.

(6) (A) Seja M uma superfície com bordo, orientada e de dimensão $m+1$. Seja w uma forma de classe C^1 e de grau m, com suporte compacto disjunto do bordo ∂M. Mostre que $\int_M dw = 0$.

(B) Disserte sobre o Teoremas de Green, Gauss e Stokes.

TOPOLOGIA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO
JULHO 2006

1) Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma familia de espaços topológicos. Sejam $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$. Provar as seguintes afirmações:

a) (1 pt.) $\overline{(\Pi_{i\in I} A_i)} = \Pi_{i\in I} \overline{A_i}$.

b) (1 pt.) $(\Pi_{i\in I} A_i)^o \subset \Pi_{i\in I} A_i^o$.

c) (1 pt.) Mostre um exemplo onde $(\Pi_{i\in I} A_i)^o \neq \Pi_{i\in I} A_i^o$.

2) (2 pt.) Sejam X um espaço compacto e Y um espaço Hausdorff e $f : X \to Y$ continua e sobrejetora. Mostre que f é aberta.

3) a) (1 pt.) Prove que o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ é finito.

b) (1 pt.) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento e $f : X \to B$. Sob quais condições existe um levantamento de f ?. Isto é, uma função $\widetilde{f} : X \to E$ tal que $f = p \circ \widetilde{f}$.

c) (1 pt.) Prove que toda aplicação continua de $\mathbb{RP}^2$ em S^1 é homotopica a uma aplicação constante.

4) (2 pt.) Sejam $A \subset \mathbb{R}^k$ fechado e $f : A \to \mathbb{R}^n$ continua $(k, n \geq 1)$. Provar que existe uma extensão continua de f a todo $\mathbb{R}^k$.

IMECC-UNICAMP-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$
DATA: 15/12/2006

(1) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $|f(x)| \leq |x|^2$, mostre que f é diferenciável em $x = 0$.

(2) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e suponha que a bola unitária $B_1(0)$ está contida em Ω. Seja $h : \Omega \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^∞ definida por $h(z) = (f(z), g(z))$ tal que $f(z)^2 + g(z)^2 = 1$ para todo $z \in \Omega$.

(A) Mostre que $f_x g_y - f_y g_x = 0$ para todo $z = (x, y) \in \Omega$.

(B) Seja S^1 o bordo de $B_1(0)$, calcule $\int_{S^1} fdg - gdf$.

(C) Mostre que não existe uma aplicação h nas condições acima tal que $h\,|_{S^1}$ seja a aplicação identidade.

(3) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 com determinante jacobiano não-nulo em todo ponto de Ω, mostre que existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in \Omega$.

(4)
(A) Seja w uma 1-forma diferencial definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $dw = 0$. Seja M uma região limitada de Ω, cujo bordo ∂M é uma curva C^∞. Mostre que $\int_{\partial M} w = 0$.

(B) Considere $w = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. Mostre que $dw = 0$, mas $\int_C w = 2\pi$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$, bordo da região limitada $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Isso contradiz o resultado do item (A)?

(5) Seja H o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido pela equação $< b, x >= c$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para mostrar que o ponto de H mais próximo do ponto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ é $x = a + \frac{c - <b,a>}{|b|^2} b$.