AI. Sejam $X_1, \cdots, X_{n1}$ e $Y_1, \cdots, Y_{n2}$ amostras aleatória independentes de $X \sim exp(\theta)$ e $Y \sim exp(\lambda)$, respectivamente e seja $\Delta = \theta/\lambda$.

[5] a. Determine um intervalo de confiança para $\Delta = \theta/\lambda$ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

[5] b. Para $\lambda = \theta$, determine um ENVUMV para θ.

[7] c. Obtenha o teste da razão de verpssimilhança exata para testar

$$H_0 : \Delta = 1 \quad vs \quad H_1 : \Delta \neq 1.$$

Sugestão: a hipótese acima é equivalente $H_0 : \theta = \lambda \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \lambda$.

[8] d. Suponha que $\Delta = d_0$, com d_0 conhecido. Use o o teorema de Basu, para calcular o valor esperado de

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j}{\Delta \sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j}.$$

AII. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de X, com distribuição $f(\cdot|\alpha, \beta)$ definida para $\alpha > 0$, $\beta > 0$ como segue,

$$f(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha\beta^\alpha x^{\alpha-1} & \text{se} \quad 0 < x < \beta^{-1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

[5] a) Determine a estatística suficiente para (α, β). Fundamente sua resposta.

[6] b) Determine o EMV para as parametros α e β. (Não precisa discutir rigorosamente que EMV é um ponto de máximo)

[7] c) Suponha que a distribuição a priori de β é $U[0, 1]$. Determine a distribuição a posteriori de β.

[7] d) Para $\beta = 1$, obtenha um teste UMP para testar testar as hipóteses $H_0 : \alpha = \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha < \alpha_0$.

AIII Para uma amostra de tamanho 1 da v. a X que tem densidade dada por $f(\cdot|\eta, \beta)$ com parâmetros $\beta > 0$ $\eta > 0$, onde

$$f(x|\eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta}\left\{\frac{x}{\eta}\right\}^{\beta-1} \exp(-\{x/\eta\}^{\beta}) I_{[0,\infty)}(x). \tag{1}$$

Sabemos que se $\Gamma(r) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r-1} dt$, então $E(X^r) := \eta^r \Gamma(1 + \frac{r}{\beta})$.

[4] a) Sabendo que β_0 é o verdadeiro valor de β determine um ENVUMV para η^{β_0}. Calcule nesse caso a variância do estimador proposto.

[6] b) Determine o teste MP(α) para testar $H_0 : \eta = \eta_0$ vs $H_1 : \eta = \eta_1$, onde $\eta_1 = 2\eta_0$. Assumindo que $\beta = \beta_0$ no enunciado geral. Apresente a região de rejeição do teste. Determine o valor da função poder na alternativa, calcule $P(II)$. Verifique se o teste construído é viciado.

[7] c) Assuma para a quantidade η uma priori IG$(1, b_0)$ (distribuição Inversa de Gama de hiperparametros $a = 1$ e $b = b_0$) e $\beta = 1$. Moste que $\eta|x \sim IG(2, x + b_0)$ e determine o estimador de Bayes para a quantidade η, assumindo uma função de perda quadrâtica.

[8] d) Assumindo uma função de perda "$0 - K_i$", onde $c_0 = \frac{K_0}{K_0+K_1} > 2e^{-1}$, determine o teste Bayesiano para $H_0 : \eta \leq \eta_0$ vs $H_1 : \eta > \eta_0$. Apresente a região de rejeição do teste, de tal forma que esta possa ser colocada como alguma das opções seguintes:

i) $C = \{x : x \in (c_1, c_2)\}$

ii) $C = \{x : x < c_1\}$

iii) $C = \{x : x > c_1\}$

onde c_1, c_2 são valores constantes.

Dica; IG(a, b): $f(x|a, b) := \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(a+1)} \exp(-b/x) I_{(0,\infty)}(x)$, .

BI. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição uniforme $U(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

[6] a) Para $\alpha = 0$, obtenha o ENVUMV para β.

[6] b) Para β conhecido, obtenha o estimador de máxima verossimilhança para α e mostre que $T(X_1, \cdots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ é uma estatística suficiente para α.

[6] c) Para $\beta = 1/2$, mostre que $(X_{(1)}, X_{(n)})$ não é completa para α. Observe que $E(X_{(1)}) = (n+1)^{-1}$ e $E(X_{(n)}) = n/(n+1)$.

[7] d) Se $\alpha = \beta$, determine um teste UMP para testar $H_0 : \beta = \beta_0$ contra $H_1 : \beta > \beta_0$.

BII. Considere o modelo estatístico representado por $F(y_1, ..., y_n \mid \beta)$, onde $E_\beta(Y_i) = \mu_i$ e $\text{Var}_\beta(Y_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, ..., n$.

[12] a) Se $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2), i = 1, ..., n$ independentes, com $x_1, ..., x_n$ conhecidos.
i) Determine a estatística de Escore Q_S para testar as hipóteses $H_0 : \beta = \beta_0$ vs $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

ii) Se σ^2 é conhecido e $\beta \sim N(0, 1)$, determine o estimador de Bayes considerando a perda quadrática.

[13] b) Se $Y_i \sim \text{Poisson}(\beta x_i)$, $i = 1, ..., n$ independentes.

i) Determine o LIDCR para um estimador não viciado de β^2.

ii) Considerando n grande, testar as hipóteses $H_0 : \beta = \beta_0$ contra $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

BIII. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de $X|\theta \sim F(.|\theta)$, com $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$

[5] a) Seja $\mathcal{D} = \{\delta : \delta$ qualquer procedimento de decisão$\}$. Defina os seguintes conceitos associados aos procedimentos minimax: risco de decisão, procedimento minimax, risco Bayesiano de decisão, δ^{π} : procedimento de Bayes para π.

[6] b) Suponha que $X|\theta \sim$ Bernoulli(θ) e uma priori $U(0,1)$ para a quantidade θ. Determine o procedimento de Bayes considerando a função de perda $l(\theta, d) = \frac{(\theta-d)^2}{\theta(1-\theta)}$.

Dica: Se a função βeta é definida por
$\beta eta(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$, então $\beta eta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$,
$a > 1, b > 1$.

[8] c) Suponha que δ^* é um procedimento tal que $\sup_\theta R(\theta, \delta^*) = r < \infty$. Mostre que se existe uma priori π^* tal que δ^* é procedimento de Bayes para π^* e $\pi^*\{\theta : R(\theta, \delta^*) = r\} = 1$, então δ^* é minimax.

[6] d) Assuma as condições do item b). Demonstre que o procedimento de Bayes achado nesse item resulta minimax.

OUTRAS QUESTOES

AV. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X, cuja distribuição é dada por

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

[0] a) Demonstre que esta família corresponde a uma família exponencial $k-$paramétrica, apresente a forma canônica e descreva o espaço natural canônico desta forma.

[0] b) Especifique a forma da estatística suficiente $T(X)$ para (α, β) (pode justificar por qué existe T suficiente?). Apresente a forma da função geradora de momentos para $T(X)$ e determine $E(T(X))$.

[0] c) Deduzir a forma da estatística suficiente T^* baseada na amostra $X_1, \cdots, X_n$, e em T.

Dica: Resolver a) e b) usando uma amostra X. A seqüência de n amostras somente deve ser considerada no item c).

AII Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho $n$de X, cuja distribuição é dada por

$$f_X(x|\alpha,\beta) = \frac{2}{\beta^2 - \alpha^2} x I_{(\alpha,\beta)}(x), \quad 0 \leq \alpha < \beta,$$

[05] a. Encontre uma estatística suficiente e minimal.

[07] b. Para $\alpha = 0$, mostre que $\widehat{\beta} = (\frac{2n+1}{2n})X_{(n)}$ é um estimador não viciado uniformemente de mínima variância de β.

[06] c. O estimador $\widehat{\beta}$ dado em b) é consistente? Justifique.

[07] d. Para $\alpha = 0$, proponha um intervalo de confiança para β com boas propriedades. Justifique sua resposta

1. (20 pontos) Sejam $U_1, U_2, \ldots$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. $U(0,1)$. Para $x \in [0,1]$ defina

$$N(x) = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > x\}$$

e

$$m(x) = \mathbf{E}[N(x)].$$

Mostre que

$$m(x) = e^x.$$

Sugestão: Condicione em U_1.

2. (20 pontos) Considere que X e Y são v.a.'s i.i.d. $U(0,L)$.

   (a) Considere que X e Y são v.a.'s i.i.d. $U(0,L)$. Ache a distribuição condicional de X dado que $X \leq Y$.

   (b) Dois pontos são selecionados ao acaso em uma reta de comprimento L de tal forma que X e Y se encontram em metades distintas da reta, isto é:

```
|-----x------|--------x---|
0     X     1/2       Y   L
```

   Qual a probabilidade de que os 3 segmentos de linha, de 0 a X, de X a Y e de Y a L formem um triângulo (isto é, se o comprimento de cada um deles é menor que a soma dos comprimentos dos outros.)

3. (20 pontos) Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ distribuida uniformemente no círculo unitário $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ e seja $\mathbf{Z}$ independente de $\mathbf{X}$ e com a mesma distribuição. Ache a distribuição de $\mathbf{X} + \mathbf{Z}$.

4. (20 pontos)

   (a) Seja $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_k \sim \text{Poisson}(2^{-k})$. Mostre que vale o Teorema Central do Limite.

(b) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que

$$\begin{aligned} P(X_k = 1) &= P(X_k = -1) = \frac{1 - 2^{-k}}{2} \\ P(X_k = 2^k) &= P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Prove que vale a condição de Lindeberg (sem utilizar a condição de Lyapounov).

5. (20 pontos) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}[X_k = a_k] = p, \quad \mathbb{P}[X_k = -a_k] = 1 - p$$

com $a_k > 0$ e $0 < p < 1$.
Se $a_k = k^\alpha$, para $-\infty < \alpha < \infty$, para quais valores de α e p a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

converge quase certamente para uma variável aleatória?

QI. Seja $X_1, ..., X_n$ a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

[] a. Encontre a estatística escore Q_S de $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$ e mostre que sob H_0 $Q_S \longrightarrow \chi_1^2$ (em distribuição).

[] b. Encontre a estatística de Wald Q_W de $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$ e mostre que sob H_0 $Q_W \longrightarrow \chi_1^2$ (em distribuição).

[] c. Considere σ^2 conhecido. Para quaisquer constantes a e b mostre que o estimador $\delta(x) = a\overline{X} + b$ tem função de risco igual a (considere perda quadrática)

$$R(\mu, \delta) = a^2\frac{\sigma^2}{n} + \{b - (1-a)\mu\}^2.$$

[] d. Suponha que $X \sim N(\mu, 1)$ e $g(\mu) = P(Z < \mu)$, onde $Z \sim N(0, 1)$. Considere o estimador $T = g(\widehat{\mu})$, onde $\widehat{\mu}$ é o EMV de μ. Encontre $m(\mu)$ e $\sigma^2(\mu)$ tais que

$$\sqrt{n}(T - m(\mu)) \longrightarrow N(0, \sigma^2(\mu)).$$

Use o resultado acima para determinar um intervalo de confiança de para $g(\mu)$ com confiança de 95%

Q2.

[] a. Enuncie os teoremas de Rao-Blackwell e de Lehmann-Scheffé

[] b. Faça uma discussão suscinta sobre a diferença entre os 2 teoremas.

[] c. Enuncie o Teorema da desigualdade de Cramer -Rao quando o parametro de interesse é $\tau(\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}$. Faça uma discussão do uso desta desigualdade para encontrar ENVUMV.

[]d. Prove um dos três teoremas.

Q3. Considere o modelo definido por $Y_i \sim$ Poisson(βx_i), $i = 1, ..., n$ independentes.

[] a. Determine a estatística suficiente para β. A estatistica suficiente é completa?. Justifique.

[] b. Considerando n grande, testar as hipóteses $H_0 : \beta = \beta_0$ contra $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

[] c. Suponha que $lim_{n \longrightarrow \infty} \bar{x} = a$, com $a \neq 0$. Mostre que que o EMV de β é um estimador consistente.

[] d. Assuma que β tem uma distribuição a priori exponencial de parâmetro 1. Isto é. $\beta \sim exp(1)$. Determine o estimador de Bayes.

QIV. O modelo Gumbel de parâmetros α e β possui f.d.a dada por
$F(x) := \exp(-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}})$, $\beta > 0$, $-\infty < \alpha < +\infty$, para $-\infty < x < +\infty$.

[10] a. Considere uma amostra aleatória $X_1, \cdots, X_n$ proveniente da distribuição de Gumbel(α, β), assumindo que $\beta = \beta_0$ conhecido.

i. Proponha com base nessa amostra um ENVUMV para a quantidade $e^{-\frac{\alpha}{\beta}}$;

ii. Ache uma quantidade pivotal para α que dependa de $X_{(n)}$ e construa o 100 γ % I.C. para $e^{-\alpha}$, onde $X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

[5] b. Seja $X \sim$ Gumbel(α_0, β_0), onde α_0 e β_0 são conhecidos. Determine a decisão ótima δ^* conforme alguma regra de decisão, usando a seguinte função de perda,

$$l(x, \delta) := \begin{cases} a(\delta - x) & \text{se} \quad \delta \leq x \\ b(x - \delta) & \text{se} \quad x < \delta \end{cases}, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes positivas.}$$

Sugestão: Utilize como criterio de decisão ótima a perda esperada.

[10] c. Prioris-Posterioris:

i. Defina os seguintes conceitos: distribuição a priori, priori não informativa, priori impropria, priori propria.

ii. Seja $X \sim$ Gumbel(α, β_0), onde β_0 é fixo e conhecido. Assuma para α uma priori $\pi(\alpha) \propto \exp(-t_1 e^{\frac{\alpha}{\beta_0}}) e^{\frac{t_2}{\beta_0}\alpha}$, onde t_1 e t_2 são constantes conhecidas. Determine a posteriori $\pi(\alpha|x)$ e demonstre que esta apresenta a mesma forma funcional da priori, para adequadas constantes t_1^* e t_2^*.

Dica Geral da questão: Se $X \sim$ Gumbel(α, β), então

$$E(e^{tX}) = e^{t\alpha}\Gamma(1 - t\beta), \forall t: \ 1 > t\beta, \text{ onde } \Gamma(u) := \int_0^\infty s^{u-1} e^{-s} ds.$$

1. Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s independentes com distribuição comum $U(0,1)$. Seja $W_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
   (a) Ache a distribuição conjunta de (W_n, M_n).
   (b) Ache a distribuição condicional de W_n dado $M_n = u$.
   (c) Ache a $\mathbb{E}[W_n | M_n]$.

2. Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a.'s i.i.d. com distribuição comum $U(0,1)$. Seja $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Mostre que

$$n(1 - M_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

   onde $X \sim \exp(1)$.

3. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Prove que para quaisquer eventos A e $B \in \mathcal{A}$ temos $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$ where $A \triangle B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

4. Seja X uma variável aleatória tomando valores inteiros não negativos com função geradora de probabilidade $h(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Após observar X, realizamos X ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Denote por Y o número total de sucessos observados.

   (a) Determine a função geradora de probabilidade de Y.

   (b) Ache a função geradora de probabilidade de X dado que $Y = X$.

   (c) Suponha que as funções geradoras de (a) e (b) coincidem, mostre que a distribuição de X é Poisson.

5. Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a.'s independentes com $X_i \sim \exp(1/\beta_i)$. Prove que vale o TCL sempre que

$$\frac{\left(\max_{1 \leq j \leq n} \beta_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$