Exame Qualificação - Álgebra Comutativa - 03/08/2005

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos e com identidade não nula.

1. Mostre que:

a) Se R é um anel e $I \subseteq R$ é um ideal finitamente gerado não nulo tal que $I^2 = I$ então existe um ideal maximal $\mathbf{m}$ de R que **não** contém I.

b) Se B é um subanel de $\mathbb{Q}$ (corpo dos números racionais) que contém propriamente o anel de inteiros $\mathbb{Z}$ então B não é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.

c) Se R é um anel, M, N são R-módulos, J é um ideal tal que $J \subseteq ann(M) = \{r \in R; rM = \{0\}\}$ e $I \subseteq R$ é um ideal qualquer então:

$$M \otimes_R \frac{R}{J} \simeq M, \qquad \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{I} \simeq \frac{R}{I} \qquad \text{e} \qquad \frac{M \otimes_R N}{I(M \otimes_R N)} \simeq \frac{M}{IM} \otimes_R \frac{N}{IN}$$

d) Se L é um corpo algebricamente fechado, $A = L[X_1, \cdots, X_n]$ é o anel de polinômios a n variáveis e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, onde $V_1 = \vartheta(I)$ e $V_2 = \vartheta(J)$ são duas variedades algébricas de L^n, com I, J ideais de A então $I + J = A$. Exiba um exemplo de que a afirmação acima não é verdadeira se retirarmos a hipótese de que L é algebricamente fechado.

---

2. Seja R um anel tal que para todo $x \in R$, $x \neq 0$, tem-se que $\frac{R}{(x)}$ é finito. Mostre que:

a) R é anel noetheriano. Mais ainda se R não é domínio então R é Artiniano.

b) Se R é domínio e $I \subseteq R$ é ideal próprio e não nulo então I tem uma única decomposição primária minimal.

d) Se R é domínio principal e M é R-módulo finitamente gerado então o submódulo de torsão de M, $T(M) = \{m \in M;\ \text{existe}\ r \in R \setminus \{0\}\ \ \text{tal que}\ rm = 0\}$, é finito.

---

3. Seja R um anel. **a)** Dado um ideal primo $\wp$ de R. Defina a altura de $\wp$ e enuncie o teorema generalizado de Krull para ideais.

b) Supondo que $R = K[X, Y, Z]$ é o anel de polinômios a 3 variáveis sobre o corpo K. Mostre que o número mínimo de geradores do ideal $I = (X^3, X^4 - Y^2, Z^3 - Y^3)$ é exatamente 3.

c) Sabendo que $(R, \mathbf{m})$ é anel local noetheriano, que a altura de $\mathbf{m}$ é n e que $K = \frac{R}{\mathbf{m}}$ pergunta-se: Qual é a relação entre n e a dimensão do K-espaço vetorial $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m}^2}$? Justifique em detalhes sua resposta.

Boa Prova

IMECC-UNICAMP

Departamento de Matemática

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO

Análise Funcional

01/08/2005

OS PONTOS 1-2-3 SÃO OBRIGATORIOS

ESCOLHA EXATAMENTE DOIS (2) DOS PONTOS 4-5-6

****

1. a) Seja X um espaço normado e $\zeta_0 \in X - \{0\}$. Então existe um funcional linear limitado φ sobre X tal que $\|\varphi\| = 1$ and $\varphi(\zeta_0) = \|\zeta_0\|$.

b) Mostre que para todo $x \in X$ temos $\|x\| = sup\,\{|f(x)|/\|f\| : f \in X^* \; e \; f \neq 0\}$.

2. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Se o gráfico de T, $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx); x \in E\}$, é fechado em $E \times F$ então T é continua.

3. Seja $(H, < \cdot, \cdot >)$ um espaço de Hilbert e $F : H \to \mathbb{C}$ um funcional linear limitado. Mostre que existe um único $\zeta \in H$ tal que $F(x) =< x, \zeta >$ para todo $x \in H$.

****

4. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $(X^*, \|\cdot\|_1)$ o espaço vetorial normado com $X^* = \{\psi : X \to \mathbb{C} : \psi$ é linear e continuo$\}$ e $\|\psi\|_1 = sup\,\{|\psi(x)|/\|x\| : x \in X - \{0\}\}$. Mostre que $(X^*, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

5. a) Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado sobre o espaço de Banach X. Mostre que se $\|A\| < 1$ então o operador $(I - A)^{-1}$ existe como um operador linear limitado em todo X e $(I - A)^{-1} = \Sigma_{n=0}^{\infty} A^n$ (verificar a convergencia da série)

b) Seja $\ell^2 \equiv \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ com norma $\|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$. Considere $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido para $x = (x_n) \in \ell^2$ como $Tx = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots)$. Mostre que $I - T$ é invertivel e encontre uma formula explicita para sua inversa.

6. Seja $\ell^2 \equiv \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ com norma $\|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$. Considere $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido para $x = (x_n) \in \ell^2$ como $Tx = (\frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \ldots)$. Mostre: a) T é um operador linear compacto. b) O único autovalor de T é zero. (sugestão: use que $(n!)^{1/n} \to \infty$ para $n \to \infty$)

IMECC-UNICAMP

Departamento de Matemática

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO

Análise Funcional

12/12/2005

2.5 1. Seja $\ell^1 \equiv \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ e $\ell^\infty \equiv \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{C}, sup_{n\in\mathbb{N}}|x$
$\infty\}$. Mostre que o espaço dual de ℓ^1 é ℓ^∞.

2.5 → 2. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|$.

1.5 a) Mostre que se $M \neq \emptyset$ é um subconjunto convexo de H o qual é fechado, então p
todo $x \in H$ existe um **único** $\beta_x \in M$ tal que

$$\delta = inf_{\beta\in M}\|x-\beta\| = \|x-\beta_x\|.$$

1.0 b) Mostre que se $M \neq \emptyset$ é um subespaço fechado de H, então para $x \in H$ fixado ex
um único $\beta_x \in M$ tal que $z \equiv x - \beta_x$ é ortogonal a M.

2.5 3. Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $\{T_n\}$ uma seqüência
operadores limitados, $T_n : X \to Y$. Suponha que para cada $x \in X$ existe $c_x \in \mathbb{R}$ tal q

$$\|T_n x\| \leqq c_x, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_n\| \leqq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(Sugestão: Use o Teorema de Baire.)

2.5 4. Sejam $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear limita
Mostre

1.5 (a) Existe um único operador linear $T^* : H \to H$ tal que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$ para to
$u, v \in H$.

1.0 (b) T^* definido em (a) é limitado com $\|T\| = \|T^*\|$.

(Sugestão: Use o Teorema de Representação de Riesz.)

2.5 5. Sejam $J = [a, b]$ e $K : J \times J \to \mathbb{R}$ contínua. Considere o seguinte espaço, $C([a, b]$
$\{f : [a, b] \to \mathbb{R}|\ f$ é contínua $\}$ com norma $\|f\| = max_{x\in J}|f(x)|$. Defina o operad
$T : C([a, b]) \to C([a, b])$ como

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy.$$

Mostre que T é um operador linear compacto.

Exame de qualificação Doutorado - Homologia - Dezembro 2005

NOME:

RA:

-Justifique as suas respostas usando os teoremas básicos (exemplo, Invariância homotópica da homologia, aproximação celular, etc.)

---

1) Sejam $T = S^1 \times S^1$ e K^2 a garrafa de Klein.

a) Calcule os grupos fundamentáes de T^2 e K^2 em termos de geradores e relações .

b) Construa um recobrimento $r : T^2 \to K^2$ (sugestão: descreva ambos os espaçõs como quocientes de $\mathbb{R}^2$)

c) Em termos dos geradores da parte (a), escreva o homomorfismo induzido $r_* : \pi_1(T^2, t_0) \to \pi_1(K^2, k_0)$.

---

2) Calcule os grupos de homologia sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Q}$ dos seguintes espaços: (sugestão: escreva primeiro o complexo de cadeias C-W para as decomposições C-W canônicas de X e Y)

a) $X = \mathbb{R}P^4$

b) $Y = \mathbb{C}P^2$

c) $Z = X \# Y$, a soma conexa de X e Y.

---

3) Sejam $(X, x_0), (Y, y_0)$ espaços com ponto base. A união de um ponto de $(X \vee Y, p_0)$ é definida como a união disjunta de X e Y identificando x_0 e y_0; p_0 é a classe de equivalência de x_0 (que é a mesma que a classe de y_0). Seja $X = (S^2, N) \vee (S^1, N) \vee (S^1, N)$.

a) Forneça decomposições C-W de X e do toro T^2 tais que os complexos de cadeias das respectivas decomposições coincidem. Conseqüentemente, os grupos de homologia e cohomologia de X e T^2 são isomorfos. Calcule estes grupos de homologia e cohomologia.

b) Mostre que os anéis de cohomologia de X e T^2 são diferentes. Enuncie claramente os resultados usados para calcular os anéis de cohomologia.

Exame de qualificação - Homologia - Agosto 2005

NOME:

RA:

-FAÇA 3 DAS 4 QUESTÕES

-Justifique suas respostas usando os teoremas básicos mencionados no curso e seminários (exemplo, Invariancia homotópica da homologia, aproximação celular, etc.)

1a) Dados k, n, descreva uma função $f : S^n \to S^n$ de grau k.

1b) Dados r, s, construia um complexo C-W conexo $X_{r,s}$ que satisfaz para $k \geq 1$

$$H_k(X_{r,s}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_r, & k = r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1c) Sejam $G_1, G_2, \ldots$ uma sequência de grupos abelianos finitamente gerados. Mostre que existe um complexo C-W conexo X que satisfaz $H_i(X) \equiv G_i$ para todo $i \geq 1$. Se tiver problemas com complexos C-W infinitos, fazer o caso $G_i = 0$ com a exceção de um número finito de i. *Sugestão* Lembre da seguinte parte do teorema fundamental de grupos abelianos finitamente gerados:

Teorema: *Todo grupo abeliano finitamente gerado é isomorfo a um grupo da forma* $\mathbb{Z}^m \oplus Z_{k_1} \cdots \oplus Z_{k_j}$

---

2) Considere os espaços $X = \mathbb{C}P^n$ e $Y = \mathbb{C}P^{n-1} \vee S^{2n}$.

2a) Mostre que todos os grupos de homologia e cohomologia de X e Y são iguais.

2b) Mostre que $\pi_{2n}(X) = 0$.

2c) Construir um elemento não trivial de $\pi_{2n}(Y)$, conclua que X e Y não são homotopicamente equivalentes.

---

3) Seja $f : S^1 \times S^1 \to S^2$ obtida colapsando de $S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$ a un ponto. mostre que f não é homotopicamente nula mostrando que induz un isomorfismo em H_2. Por outro lado, mostre usando recobrimentos que toda função $h : S^2 \to S^1 \times S^1$ é homotopicamente nula.

---

4) Calcule o grupo fundamental e a homologia da soma conexa $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.

IMECC–UNICAMP
Departamento de Matemática
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO
Análise Funcional, 05/05/2005

1. (2,0) Seja (T_n) uma seqüência de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach E e F. Suponhamos que exista uma constante c tal que $||T_n|| \leq c$ para todo n e que $(T_n x)$ convirja em F para todo x num subconjunto denso em E. Prove que $(T_n x)$ converge em F para todo $x \in E$.

2. (2,0) Seja $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_j)_{j=1}^{\infty}\,;\, x_n \in \mathbb{R},\ \lim x_j = 0\}$, munido da norma do supremo $||x||_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_n|$. Sejam $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \cdots \infty$, tal que, para cada $x = (x_j) \in c_0$, a série $\varphi_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j$ é convergente. Suponhamos também que a seqüência $Tx \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_i(x))$ pertença a l_∞ para cada $x \in c_0$, i.e. $\sup_{i \in \mathbb{N}} |\varphi_i(x)| < \infty$. Prove que $\varphi_i \in c_0{}'$ para cada $i \in \mathbb{N}$ e que T é um operador (linear) limitado de c_0 em l_∞.

3. (2,0) Sejam M e N subespaços fechados de um espaço normado E. Usando o Teorema de Hahn-Banach, prove que se $M \neq N$ então $M^\perp \neq N^\perp$.

4. Seja A_n, $n = 1, 2, \cdots$, o conjunto das funções $f \in C([0,1])$ tais que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n$$

para algum $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ e para todo $h \in (0, \frac{1}{n}]$.
a) (1,0) Prove que cada A_n é um subconjunto fechado de $C([0,1])$.
b) (1,0) Usando que cada A_n tem interior vazio em $C([0,1])$ **(nao precisa provar este fato)** e o Teorema de Baire, prove que existe $f \in C([0,1])$ que não tem derivada em nenhum ponto do intervalo $[0,1]$.

5. (2,0) Dada uma seqüência $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ limitada, defina o operador $T : l_2 \to l_2$, $Tx \stackrel{\text{def}}{=} (a_j x_j)_{j=1}^{\infty}$, $x = (x_j) \in l_2$. Prove que T é um operador compacto se, e somente se, $\lim_{j \to \infty} a_j = 0$.

Exame de qualificação Doutorado - Homologia - Dezembro 2005

NOME:

RA:

-Justifique as suas respostas usando os teoremas básicos (exemplo, Invariância homotópica da homologia, aproximação celular, etc.)

---

1) Sejam $T = S^1 \times S^1$ e K^2 a garrafa de Klein.

a) Calcule os grupos fundamentáes de T^2 e K^2 em termos de geradores e relações .

b) Construa um recobrimento $r : T^2 \to K^2$ (sugestão: descreva ambos os espaçõs como quocientes de $\mathbb{R}^2$)

c) Em termos dos geradores da parte (a), escreva o homomorfismo induzido $r_* : \pi_1(T^2, t_0) \to \pi_1(K^2, k_0)$.

---

2) Calcule os grupos de homologia sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Q}$ dos seguintes espaços: (sugestão: escreva primeiro o complexo de cadeias C-W para as decomposições C-W canônicas de X e Y)

a) $X = \mathbb{R}P^4$

b) $Y = \mathbb{C}P^2$

c) $Z = X \# Y$, a soma conexa de X e Y.

---

3) Sejam $(X, x_0), (Y, y_0)$ espaços com ponto base. A união de um ponto de $(X \vee Y, p_0)$ é definida como a união disjunta de X e Y identificando x_0 e y_0; p_0 é a classe de equivalência de x_0 (que é a mesma que a classe de y_0). Seja $X = (S^2, N) \vee (S^1, N) \vee (S^1, N)$.

a) Forneça decomposições C-W de X e do toro T^2 tais que os complexos de cadeias das respectivas decomposições coincidem. Conseqüentemente, os grupos de homologia e cohomologia de X e T^2 são isomorfos. Calcule estes grupos de homologia e cohomologia.

b) Mostre que os anéis de cohomologia de X e T^2 são diferentes. Enuncie claramente os resultados usados para calcular os anéis de co-

EXAME DE QUALIFICAÇÃO

Álgebra não Comutativa

Dezembro, 2005

Resolver 1, 2, 3, e ESCOLHER mais dois exercícios entre 4, 5, 6.

1. Seja $A = UT_n$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre o corpo dos números racionais. (São as matrizes cujas entradas **abaixo** da diagonal principal são zeros.)

a) Encontrar o radical de Jacobson $J = J(A)$ e o radical de Baer $\beta = \beta(A)$.

b) Mostrar que a álgebra A/J é isomorfa a uma soma direta de cópias do corpo dos racionais.

2. a) Enunciar o teorema sobre a densidade.

b) Definir grupo de Brauer.

c) Enunciar o teorema de Wedderburn e Artin.

d) Definir base de Hall da álgebra de Lie livre.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justificar as suas respostas.

a) Se L é uma álgebra de Lie livre com produto não trivial e $I \neq 0$ é um ideal de L, então I, como álgebra de Lie, também é livre.

b) Se R é um anel artiniano à direita e com 1, então R é noetheriano à direita.

c) Todo automorfismo de uma álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo é interno.

d) Seja G um grupo de matrizes invertíveis de ordem n sobre o corpo dos racionais e suponha que G é periódico (i.é. para todo $g \in G$ existe n tal que $g^n = 1 \in G$. Então G é finito.

4. Seja $L = sl_2$ a álgebra de Lie das matrizes 2×2 com traço zero sobre os complexos. Sejam $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{12}$ e $c = e_{21}$.

a) Mostrar que a, b, c formam uma base de L e encontrar as regras de multiplicação entre os elementos dessa base.

b) Encontrar uma base da álgebra universal envolvente $U(L)$ e as regras de multiplicação entre os elementos dessa base. A álgebra $U(L)$ é de dimensão finita? É noetheriana?

5. Seja R um anel artiniano à direita, sem divisores de 0, e $1 \in R$. Mostrar que R é anel com divisão.

6. Sejam D e D' dois anéis com divisão e m e n dois inteiros positivos, tais que $M_n(D) \cong M_m(D')$. Mostrar que $m = n$ e $D \cong D'$.

Marcelo

IMECC–UNICAMP
Departamento de Matemática
EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO
Equações Diferenciais Parciais II, 05/05/2005

1. Considere B^N a bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e seja $S^{N-1} \equiv \partial B^N$. Para cada função $f \in C^1(B^N) \cap C^0(\overline{B^N})$ considere o funcional linear J_f dado por

$$\varphi \mapsto J_f(\varphi) \equiv \int_{S^{N-1}} |f(x)|^2 \varphi(x) dS(x),$$

onde φ é uma função teste em $C^\infty(S^{N-1})$ e $dS(x)$ é o elemento de volume $(N-1)$-dimensional na esfera.

Mostre que, se $p > N$, então o operador não-linear $f \mapsto J_f$ se estende a um operador contínuo de $W^{1,p}(B^N)$ para o dual de $L^2(S^{N-1}, dS)$. É possível encontrar valores de $p = p(N) \leq N$ para os quais o operador não-linear $f \mapsto J_f$ também se estende a um operador contínuo de $W^{1,p}(B^N)$ para o dual de $L^2(S^{N-1}, dS)$?

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de fronteira suave, $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$, $f \geq 0$. Seja $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + f(x)\, u = g(x) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Mostre que existe $C = C(\Omega, f) > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|g\|_{H^{-1}}$$

e conclua com o enunciado preciso de um teorema de unicidade para o problema (1). Pode-se relaxar a condição $f \geq 0$ para $\min_{\overline{\Omega}} f > -\lambda$, onde λ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω? Discuta o problema (1) no caso em que $f(x) \equiv -\lambda$.

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de fronteira suave. Sejam $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e seja L um operador elíptico linear de segunda ordem. Sejam $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que a forma bilinear $B = B(u,v)$ naturalmente associada a L, definida em $H_0^1(\Omega)$, satisfaça:

$$B[u,u] + \gamma \|u\|_{L^2}^2 \geq \beta \|u\|_{H^1}^2,$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Suponha que $\beta > C\gamma$ para algum $C > 1$ e que $\gamma > 0$. Considere os dois problemas abaixo:

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T) \\ u = g \text{ em } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} Lv = f \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Mostre que a solução $u = u(\cdot, t)$ de (2) converge à solução v de (3) quando $t \to \infty$ na norma de $L^2(\Omega)$. Mais precisamente, mostre que existe $C = C(f, g) > 0$ tal que:

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot)\|_{L^2}^2 \leq Ce^{-2\gamma(C-1)t}.$$

EXAME DE QUALIFICAÇÃO

Álgebra não Comutativa

Dezembro, 2005

Resolver 1, 2, 3, e ESCOLHER mais dois exercícios entre 4, 5, 6.

1. Seja $A = UT_n$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre o corpo dos números racionais. (São as matrizes cujas entradas **abaixo** da diagonal principal são zeros.)

a) Encontrar o radical de Jacobson $J = J(A)$ e o radical de Baer $\beta = \beta(A)$.
b) Mostrar que a álgebra A/J é isomorfa a uma soma direta de cópias do corpo dos racionais.

2. a) Enunciar o teorema sobre a densidade.
b) Definir grupo de Brauer.
c) Enunciar o teorema de Wedderburn e Artin.
d) Definir base de Hall da álgebra de Lie livre.

3. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justificar as suas respostas.
a) Se L é uma álgebra de Lie livre com produto não trivial e $I \neq 0$ é um ideal de L, então I, como álgebra de Lie, também é livre.
b) Se R é um anel artiniano à direita e com 1, então R é noetheriano à direita.
c) Todo automorfismo de uma álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo é interno.
d) Seja G um grupo de matrizes invertíveis de ordem n sobre o corpo dos racionais e suponha que G é periódico (i.é. para todo $g \in G$ existe n tal que $g^n = 1 \in G$. Então G é finito.

4. Seja $L = sl_2$ a álgebra de Lie das matrizes 2×2 com traço zero sobre os complexos. Sejam $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{12}$ e $c = e_{21}$.

a) Mostrar que a, b, c formam uma base de L e encontrar as regras de multiplicação entre os elementos dessa base.
b) Encontrar uma base da álgebra universal envolvente $U(L)$ e as regras de multiplicação entre os elementos dessa base. A álgebra $U(L)$ é de dimensão finita? É noetheriana?

5. Seja R um anel artiniano à direita, sem divisores de 0, e $1 \in R$. Mostrar que R é anel com divisão.

6. Sejam D e D' dois anéis com divisão e m e n dois inteiros positivos, tais que $M_n(D) \cong M_m(D')$. Mostrar que $m = n$ e $D \cong D'$.

Geometria Riemanniana

Exame de qualificação ao Doutorado em Matemática 16/12/05

Nome:

R.A. :

.1^a Questão:

a) Seja G um grupo de Lie compacto. Assuma que ele possue uma medida bi-invariante υ_g. Prove que G admite métricas Riemannianas $\langle , \rangle_1$, $\langle , \rangle_2$ e $\langle , \rangle$ que são invariantes a esquerda, direita e bi-invariante, respectivamente.

b) Prove que $K_G \geq 0$ na métrica bi-invariante acima definida.(Assuma como verdadeiro que $\nabla_X^X = \overrightarrow{0}$, se X for um campo sobre G invariante à esquerda).

2^a Questão:

Seja M^{11} uma variedade Riemanniana completa com $K_M \geq \frac{7}{8}$. Mostre que se $\gamma : [0, L] \to M$ .for uma geodésica normalizada com $L = l(\gamma) > \pi/\sqrt{\frac{8}{7}}$ então, $\exists\, t_0 \in (0, L)$ com $\gamma(0)$ e $\gamma(t_0)$ conjugados(não apele para o Teorema de Bonnet-Myers). Será que $\pi_1(M, *)$ pode ser igual a $\mathbb{Z}$? Dê um exemplo, ou prove que isto é impossível.

.3^a Questão:

Seja $f : M^m \to \overline{M}^{m+n}$ uma imersão isométrica com $m \geq 2$ e $n > 0$.

a) Enuncie o Teorema de Gauss que relaciona $K_M(X, Y)$ e $K_{\overline{M}}(X, Y)$, $\forall X, Y \in M_p$ e $p \in M$.

.

b) Dada uma variedade Riemanniana M, considere σ como sendo o plano gerado por $X, Y \in M_p$ e $B \subset M_p$ uma bola aberta. Seja $\mathbb{S} = \exp(B \cap \sigma)$. Interpretesendo geometricamente $K_M(X, Y)$, e prove esta interpretação. (Assuma que uma imersão é geodésica em p se, e sómente se, toda geodésica de M partindo de p é uma geodésica em $\overline{M}$).

4^a Questão:

a) Seja γ uma geodésica em M com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Considere $W \in \Omega_\gamma - \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ que é C^∞ e satisfaz $\frac{D^2 W}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), W(t))\gamma'(t) = \lambda(t)W(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, onde $\lambda : [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathbf{R}^+$. Prove que existem geodésicas γ_ϵ, arbitrariamente próximas de γ, ligando p a q com $l(\gamma_\epsilon) < l(\gamma)$.

b) Enuncie e prove o Teorema de Cartan-Hadamard. (Assuma que isometrias locais são aplicações de recobrimento).

c) Considere $P^n = \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}^6 \times N^n$, onde N é completa, simplesmente conexa, $K_N < 0$ e $n \geq 2$.

Prove que P^n é difeomorfa a $\mathbb{R}^{n+9}$..

Exame de Qualificação - Doutorado

Geometria Riemanniana

08/2005

Nome:

1. (2,0) Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Dizemos que homogênea se o grupo de isometrias G de M age transitivamente em M, isto é, dados x, $y \in M$, existe $\phi \in G$ tal que $y = \phi(x)$. Mostre que numa variedade riemanniana homogênea as curvaturas seccionais são limitadas, i.e., existe $C > 0$ tal que para todo $p \in M$ e todo $\sigma^2 \subset T_pM$, $|K(\sigma)| \leq C$. Dica: use o fato que o conjunto dos 2-planos em um espaço vetorial V de dimensão finita formam uma variedade compacta (a Grassmanniana $G_2(V)$).

2. (2,0) Enuncie o Teorema de Hadamard e mostre que duas variedades riemannianas de dimensão n, completas, simplesmente conexas, de curvatura nula, são globalmente isométricas. Em outras palavras, é um $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana.

3. (3,0) Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Suponha que na identidade $e \in G$ as curvaturas de Ricci são todas positivas, i.e., para todo $v \in T_eG$, $v \neq 0$, $Ric_e(v) > 0$. Mostre que G é compacto. A recíproca é verdadeira? (Dica: pense em $S^1 \times S^1$).

4. Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas de maneira breve.
   (a) (1,0) Se uma geodésica não tem pontos conjugados então é minimal, i.e, minimiza a distância entre quaiquer dois pontos sobre ela.
   (b) (1,0) $S^1 \times S^1$, onde S^1 é o círculo, pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^3$ com curvatura seccional (ou Gaussiana) nula em todos os pontos.
   (c) (1,0) S^4, a esfera de dimensão 4, não pode ter métrica riemanniana de curvatura seccional nula em todos os pontos.

Exame Qualificação - Álgebra Não Comutativa - 03/08/2005

1. Seja
$$A = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Mostrar que A é uma sub-álgebra da $\mathbb{Q}$-álgebra $M_2(\mathbb{R})$.

b) Mostrar que para todo $\mathbb{Q}$-subespaço V de $\mathbb{R}$, o conjunto $\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v \in V$, é um ideal à esquerda de A.

c) Mostrar que a $\mathbb{Q}$-álgebra A não é nem artiniana nem noetheriana à esquerda.

d) Mostrar que os ideais à direita de A são dos seguintes tipos:
$$0, A, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\mathbb{R},$$
onde x e y são dois números reais não simultaneamente nulos.

e) Mostrar que A, como uma $\mathbb{Q}$-álgebra, é artiniana e noetheriana à direita.

2. a) Definir o **grupo de Brauer** do corpo K.

b) Qual o grupo de Brauer do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$?

c) Qual o grupo de Brauer do corpo dos números reais $\mathbb{R}$?

3. Seja U o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre o anel de divisão D.

a) Mostrar que U é uma sub-álgebra da D-álgebra $M_n(D)$.

b) Mostrar que uma matriz de U é nilpotente se e somente se as suas entradas na diagonal principal são todas iguais a 0.

c) Encontrar o radical de Jacobson de U.

4. Responder **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das perguntas abaixo. (Respostas sem a devida justificativa não serão consideradas.)

a) Todo anel primitivo é simples.

b) Se L é uma álgebra de Lie sobre um corpo K, então a álgebra universal envolvente $U(L)$ pode ter divisores de 0.

c) Se A é uma álgebra noetheriana (à esquerda), o radical de Jacobson de A é nilpotente. E se A for artiniana?

d) Se V é um espaço vetorial sobre o corpo K e T, $S \in \hom V$ com $TS = 1$ então T e S são invertíveis.

e) Se G é um grupo (multiplicativo) de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, e G é finito, então G é abeliano.

5. a) Definir o conceito de *família básica* de Hall para a álgebra livre de Lie $L(X)$.

b) Escrever os elementos da base de Hall, de grau ≤ 6, para a álgebra livre de Lie $L(X)$ no caso de $X = \{x, y\}$, $x < y$.

Boa Prova