# EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA
# PROVA DE PROBABILIDADE

**07 de janeiro de 2005**

(I) *A prova é composta de quatro questões.*

(II) *A duração da prova é de 4 horas.*

(III) *Não é permitido consulta.*

(IV) *Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*

(V) *Tranquilidade e bom trabalho!*

1. (a) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $n$ variáveis aleatórias independentes, $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$. Encontre a distribuição de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (b) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(\lambda)$. Encontre a distribuição de $X_1$.

   (c) Considere uma variável aleatória $N \sim Poisson(\lambda)$. E seja $X$ uma variavel aleatória tal que $P(X = 0 | N = 0) = 1$ e $P(X = x | N = n)$ é uma dsitribuição $Binomial(n, p)$. Mostre que $X$ e $N - X$ são independentes.

2. Sejam as variáveis aleatórias

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \text{ e } Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$

independentes. Seja $\alpha$ uma constante, tal que $0 < \alpha < 1$ e seja $\epsilon$ uma variável aleatória, independente de $X$ e de $Y$, com

$$P(\epsilon = 1) = 1 - P(\epsilon = 0) = \alpha.$$

Defina as variáveis aleatórias $W$ e $Z$ como

$$W = \alpha X + (1 - \alpha)Y,$$

a média ponderada entre $X$ e $Y$; e

$$Z = \epsilon X + (1 - \epsilon)Y,$$

uma mistura de $X$ com $Y$.

(i) Encontre, a função característica de $W$.

(ii) Encontre, a função característica de $Z$.

(iii) Encontre $E(Z)$ e $Var(Z)$.

3. (i) Defina os 4 tipos de convergência de v.a.

(ii) Convergência em $L^p$ implica na convergência quase certa? E na convergência em probabilidade? Demonstre ou dê um contra-exemplo.

(iii) Enuncie o Lema de Borel-Cantelli.

(iv) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes tais que $P(X_n = 1) = 1/\sqrt{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - 1/\sqrt{n}$. Mostre que $X_n \to 0$ em probabilidade, mas não quase certamente.

4. (i) Enuncie o Teorema Central do Limite de Lindeberg.

(ii) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes tais que $X_n$ tem distribuição Uniforme em $[0, n]$, $n = 1, 2 \ldots$.Mostre que esta sequência satisfaz o Teorema Central do Limite (quais são os parâmetros?).
Dica: pode usar as seguintes identidades

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

# EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA
# PROVA DE INFERÊNCIA

## 04 de março de 2005

*(I) A prova é composta de quatro questões.*

*(II) A duração da prova é de 4 horas.*

*(III) Não é permitido consulta.*

*(IV) Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*

*(V) Tranquilidade e bom trabalho!*

1. a Considere $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ e $\mathcal{D} = \{\delta : \delta$ um procedimento de decisão$\}$. Defina os seguintes conceitos:

   a Risco de decisão.

   b Procedimento minimax.

   c Risco bayesiano de decisão.

   b Enuncie, demonstre e de uma aplicação do Teorema da Desigualdde de Informação de Fisher.

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma distribuição $U(\theta_1, \theta_2)$.

   (a) Mostre que $min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e $max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ são estatísticas suficientes para $(\theta_1, \theta_2)$.

   (b) Encontre estimadores não viesados, uniformrmente de variância mínima para $\theta_1$ e $\theta_2$.

   (c) Suponha $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta > 0$. Construa um itervalo de confiança exato para $\theta$ com $\alpha = 0.05$.

3. Seja $X$ uma **única** observação com densidade

$$f(x;\theta) = (2\theta x + 1 - \theta)\mathbf{I}_{(0,1)}(x),$$

onde $\theta \in [-1, +1]$.

(i) Com base na observação $X$ construa um teste de razão de verossimilhança generalizado para testar $\mathbf{H}_0 : \theta = 0$ versus $\mathbf{H}_a : \theta \neq 0$.

(ii) Usando o item anterior, é possivel construir um intervalo de confiança para $\theta$? Justifique!

4. Seja $X$ uma variável aleatória com função de densidade dada por

$$f(x|\eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta}\Big(\frac{x}{\eta}\Big)^{\beta-1} exp\Big((-\frac{x}{\eta})^{\beta}\Big)\mathbf{I}_{(-\infty,0]}(x),$$

onde $\beta > 0$ e $\eta > 0$.

(i) Assumindo $\beta$ conhecido, determine um "$UMVUE$" para $\eta^{\beta}$. Calcule a variância do estimador proposto.

(ii) Determine o teste mais poderoso a nivel $\alpha$ para testar $\mathbf{H}_0 : \eta = \eta_0$ versus $\mathbf{H}_a : \eta = 2\eta_0$. Assumindo $\beta$ conhecido, apresente a região de rejeição do teste e calcule a probabilidade do erro tipo II.

# EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA
# PROVA DE PROBABILIDADE

**02 de março de 2005**

(I) *A prova é composta de quatro questões.*

(II) *A duração da prova é de 4 horas.*

(III) *Não é permitido consulta.*

(IV) *Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*

(V) *Tranquilidade e bom trabalho!*

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Mostre que:

   (a) Se $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, $\forall \omega \in \Omega$ e $P\big(\{\omega\}\big)$ é constante , então $\Omega$ é finito.

   (b) Para $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots,$

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

2. Considere o experimento onde $n$ bolas são distribuidas aleatoriamente em $m$ urnas, sem restrições quanto ao número de bolas por urna. Encontre:

   (a) O valor esperado do número de uranas vazias.

   (b) A variância do número de urnas vazias.

   (c) A probabilidade de exatamente uma urna vazia.

   (d) A probabilidade de exatamente $s$ urnas vazias.

3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $X, Y$ e $Z$ variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   (a) Seja $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra contida em $\mathcal{F}$. Dê a definição de $E(X \mid \mathcal{A})$.

   (b) Dê a definição de $E(X \mid Y)$.

   (c) Mostre que, se $Z = E(X \mid Y)$ e $E(X^2) = E(Z^2)$, então $X = Z$ q.c.

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que

$$P(X_n = 2n) = 1/3 \text{ e } P(X_n = -n) = 2/3.$$

   Mostre que a sequência $X_1, X_2, \ldots$ satisfaz o Teorema Central do Limite, mas não satisfaz Lei Forte dos Grandes Números.