DM–IMECC–UNICAMP, EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO

Análise Funcional, 08/07/2004

Aluno: ______________________________ RA: ______________

FAÇA NO MÍNIMO 04 (QUATRO) QUESTÕES.

1. Sejam E um espaço de Hilbert separável sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (e_n) uma seqüência ortonormal completa em E, (x_n) uma seqüência em E tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||e_n - x_n||^2 = \theta^2 < \infty$$

e $T : E \longrightarrow E$ uma aplicação definida por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)(e_n - x_n), \quad x \in E.$$

a) Prove que T está bem definida, T é linear e contínua e $||T|| \leq \theta$. Calcule Te_n.

b) Para cada $x \in E$, expresse $(I - T)x$ como uma série da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, com $\alpha_n \in K$.

2. Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $\overline{B}_E$ a bola fechada em E de raio unitário.

a) Usando o Teorema de Alaoglu (i.e. $\overline{B}_{E'}$ é compacta na topologia fraca-$*$ de E'), demonstre que $\overline{B}_E$ é compacta na topologia fraca de E.

b) Dado $\varphi \in E'$, demonstre que existe $x \in E$ com $||x|| \leq 1$ tal que $|\varphi(x)| = ||\phi||$.

3. Sejam E e F espaços de Banach. Seja $T : E \to F$ uma aplicação tal que $\psi \circ T \in E'$ para cada $\psi \in F'$.

a) Prove que T é linear;

b) Prove que T é contínua.

4. Considere as funções de Rademacher:

$$\Gamma_1(x) = \; 1, \quad x \in [0,1]$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1/2] \\ -1 & \text{se } x \in (1/2,1] \end{cases}$$

$$\Gamma_3 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1/4] \cup (1/2,3/4] = [0,1/4] \cup (2/4,3/4] \\ -1 & \text{se } x \in (1/4,1/2] \cup (3/4,1] = (1/4,2/4] \cup (3/4,4/4] \end{cases}$$

$$\vdots$$

a) Prove que $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência ortonormal em $L_2([0,1])$.

b) Seja $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\,;\, \lim x_n = 0\}$.

Prove que $Tf = \left(\int_0^1 f(x)\Gamma_n(x)\,dx\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ para cada $f \in L_2([0,1])$ e que $T : L_2([0,1]) \to c_0$ é uma aplicação linear e contínua.

5. Considere o operador $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dado por $Tf = g$ onde $g'' = f$, $g(0) = g(1) = 0$. Mostre que o zero é um elemento do espectro de T.

Exame de Qualificação em Homologia. Semestre I, 2004. 12/7/2004

Nome: R.A.:

Assinatura:

1. a) Calcule os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes inteiros das variedades $\mathbb{R}P^2 \times S^3$ e $\mathbb{R}P^3 \times S^2$. **(2,0)**

b) Calcule os grupos de homotopia $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ dos dois espaços no ítem a). Os grupos de homotopia mais alta desses espaços são iguais? São não triviais? **(2,0)**

2. Define o espaço quaterniônico projetivo $\mathbb{Q}P^5$ e calcule os seus grupos de homologia com coeficientes inteiros. O que pode dizer sobre os grupos de homotopia desse espaço? **(2,0)**

3. Calcule os seguintes grupos **(2,0)**

a) $H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ b) $H_1(S^1 \vee S^1; \mathbb{Z})$ c) $H_1(S^1 \wedge S^1; \mathbb{Z})$ d) $H_2(S^1 \wedge S^1; \mathbb{Z})$ e) $H^1(S^1 \wedge S^1; \mathbb{Z})$

4. Responder se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa com uma curta justificativa.

a) Existe uma função contínua $f : \mathbb{C}P^3 \to S^4 \times S^2$ tal que a aplicação induzida $f_* : H_n(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \to H_n(S^4 \times S^2; \mathbb{Z})$ é um isomorfismo para $n = 0, \dots, 6$. **(1,5)**

b) O fibrado tangente da esfera S^7 é trivial. **(0,5)**

Exame de qualificação : Álgebra Comutativa
14 / 07 / 2004

Todos aneis nessa prova são comutativos com 1. Todas respostas devem ser justificadas.

1. a) (1 ponto) Definir módulo noetheriano. Sejam N_1 and N_2 dois submódulos de um módulo M. Mostrar que se M/N_1 and M/N_2 são noetherianos então $M/(N_1 \cap N_2)$ é noetheriano.

b) (1 ponto) Seja A um anel noetheriano, local com ideal maximal I e $J = \cap_{k \geq 1} I^k$. Mostrar que $IJ = I$ e $J = 0$.

2. a) (1 ponto) Definir módulo artiniano. Seja $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ uma sequência exata de módulos. Mostrar que M é artiniano se e somente se M_1 and M_2 são artinianos.

b) (0.5 ponto) Seja $\varphi : M \to M$ homomorfismo injetivo de módulos. Mostrar que se M é artiniano então φ é isomorfismo.

3. a) (0.5 ponto) Definir ideal primário. Mostrar que $I = (4, x^2, y^{100})$ é um ideal primário de $\mathbb{Z}[x, y]$.

b) (0.5 ponto) Dar exemplo de ideal I num anel A tal que $\sqrt{I}$ é um ideal primo mas I não é primário.

c) (1 ponto) Escrever uma decomposição primária minimal de (x^2, xy) em $\mathbb{R}[x, y]$. Essa decomposição é única?

4.a) (0.5 ponto) Dar um exemplo de um anel que tem dimensão de Krull infinita.

b) (0.5 ponto) Seja R um anel artiniano. Calcular a dimensão de Krull de R.

c) (1 ponto) Achar um subanel B de $A = \mathbb{R}[x, y, z, w]/(x^2 - y^2, z^3 - w^2)$ tal que A é extensão integral de B e B é anel de polinomios. Calcular a dimensão de Krull do anel A.

5. (2.5 pontos) Responda **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justifique as suas respostas.

a) Sejam M, N, K R-módulos tais que $M \otimes_R N \simeq M \otimes_R K$. Então $N \simeq K$.

c) Sejam I e J ideais num anel R tais que $I + J = R$. Então $I^n + J^m = R$ para $n, m \geq 1$.

d) Existe anel R tal que $R[x]$ não é noetheriano mas $R[[x]]$ é noetheriano.

e) O anel $\mathbb{Z}_{900}$ tem exatamente 3 ideais primos e os tres são maximais.

f) Seja M um R-módulo. Então os funtores $Hom_R(M, \ )$, $Hom_R(\ , M)$, $M \otimes_R$ e localizasão com respeito a um subconjunto de R multiplicativamente fechado são todos exatos.

Boa Sorte !

Exame de qualificação : Álgebra Comutativa
14 / 07 / 2004

Todos aneis nessa prova são comutativos com 1. Todas respostas devem ser justificadas.

1. a) (1 ponto) Definir módulo noetheriano. Sejam N_1 and N_2 dois submódulos de um módulo M. Mostrar que se M/N_1 and M/N_2 são noetherianos então $M/(N_1 \cap N_2)$ é noetheriano.

b) (1 ponto) Seja A um anel noetheriano, local com ideal maximal I e $J = \cap_{k \geq 1} I^k$. Mostrar que $IJ = I$ e $J = 0$.

2. a) (1 ponto) Definir módulo artiniano. Seja $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ uma sequência exata de módulos. Mostrar que M é artiniano se e somente se M_1 and M_2 são artinianos.

b) (0.5 ponto) Seja $\varphi : M \to M$ homomorfismo injetivo de módulos. Mostrar que se M é artiniano então φ é isomorfismo.

3. a) (0.5 ponto) Definir ideal primário. Mostrar que $I = (4, x^2, y^{100})$ é um ideal primário de $\mathbb{Z}[x, y]$.

b) (0.5 ponto) Dar exemplo de ideal I num anel A tal que $\sqrt{I}$ é um ideal primo mas I não é primário.

c) (1 ponto) Escrever uma decomposição primária minimal de (x^2, xy) em $\mathbb{R}[x, y]$. Essa decomposição é única?

4.a) (0.5 ponto) Dar um exemplo de um anel que tem dimensão de Krull infinita.

b) (0.5 ponto) Seja R um anel artiniano. Calcular a dimensão de Krull de R.

c) (1 ponto) Achar um subanel B de $A = \mathbb{R}[x, y, z, w]/(x^2 - y^2, z^3 - w^2)$ tal que A é extensão integral de B e B é anel de polinomios. Calcular a dimensão de Krull do anel A.

5. (2.5 pontos) Responda **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justifique as suas respostas.

a) Sejam M, N, K R-módulos tais que $M \otimes_R N \simeq M \otimes_R K$. Então $N \simeq K$.

c) Sejam I e J ideais num anel R tais que $I + J = R$. Então $I^n + J^m = R$ para $n, m \geq 1$.

d) Existe anel R tal que $R[x]$ não é noetheriano mas $R[[x]]$ é noetheriano.

e) O anel $\mathbb{Z}_{900}$ tem exatamente 3 ideais primos e os tres são maximais.

f) Seja M um R-módulo. Então os funtores $Hom_R(M, \ \ )$, $Hom_R(\ \ , M)$, $M \otimes_R$ e localizasão com respeito a um subconjunto de R multiplicativamente fechado são todos exatos.

Boa Sorte !