Exame de qualificação : Álgebra Linear
14 / 07 / 2004

Todas respostas devem ser justificadas. A nota vai ser calculada usando-se as 5 melhor respostas

1. (2 pontos) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ um operador linear

$$T((x,y,z,t)) = (x + 2y + 3z + 4t, y + 2z + 3t, z + 2t, t)$$

a) Escrever a matriz do operador T.
b) Achar os autovalores de T.
c) Achar a forma de Jordan de T.

2. (2 pontos) Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $T^2 = T$.
a) Demonstrar que $\mathbb{C}^n = Ker(T) \oplus Im(T)$.
b) Demonstrar que o operador T é normal se e somente se $Ker(T)$ é ortogonal a $Im(T)$.

3. (2 pontos) Seja $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$. Encontrar uma transformação ortogonal das variaveis que leva f a eixos principais.

4. (2 pontos) Seja $T : V \to V$ um operador linear e V um espaço linear de dimensão finita.
a) Demonstrar que $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$.
b) Se $dim(V)$ é impar e $T^2 = 0$ então $dim(T(V)) < dim(Ker(T))$.

5. (2 pontos) Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dois operadores autoadjuntos tais que $T_1T_2 = T_2T_1$. Demonstra que existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ cujos elementos são autovetores de ambos T_1 e T_2.

6. (2.0 pontos) Responda **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justifique as suas respostas.
a) Todo operador linear em $\mathbb{R}^6$ possui um autovetor.
b) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então $V \otimes V^*$ tem dimensão finita que é um número par.
c) Seja A um bloco de Jordan. Então A^t pode ter dois blocos de Jordan na sua forma de Jordan.
d) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ existem matrizes invertíveis B e C tais que $BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Boa Sorte !

DM–IMECC–UNICAMP, EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO

Análise no $\mathbf{R}^n$, 08/07/2004

Aluno: ______________________________ RA: ______________

FAÇA NO MÍNIMO 04 (QUATRO) QUESTÕES.

1. Considere o 2-cubo singular em $I\!R^3$, $c : [0,1]^2 \to I\!R^3$, dado por $c(u,v) = (2u, v, 1 - v^2)$.

   (a) Integre a forma $\omega = dx \wedge dy$ em c;

   (b) Faça um esboço mostrando as imagens de c e ∂c;

   (c) Encontre uma 1-forma ϕ no $I\!R^3$ tal que $d\phi = \omega$ e faça uma verificação direta do Teorema de Stokes, mostrando que a integral de ϕ em ∂c coincide com aquela calculada em (a).

2. Faça a prova rigorosa da igualdade $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}$.

3. Considere a aplicação de classe C^1, $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ dada por $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, tal que $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ e $\nabla u(x,y) \neq 0$ para qualquer $(x,y) \in I\!R^2$. Mostre que f leva curvas regulares que se cruzam em curvas regulares que se cruzam formando um mesmo ângulo.

4. Considere a 2-forma diferenciável em $I\!R^3$,

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

   Mostre que ela é fechada mas não é exata

5. Seja A uma matriz simétrica real de ordem n. Mostre que os pontos de mínimo da função $f(x) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ restrita à esfera unitária S^{n-1} ($||\mathbf{x}|| = \mathbf{1}$) são autovetores de A, i.e. em qualquer um desses pontos temos a equação $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ satisfeita para algum escalar λ.

6. Prove que a aplicação $f(x,y) = e^x(\cos y, \operatorname{sen} y)$, $(x,y) \in I\!R^2$, é um difeomorfismo local de classe C^∞. É global?

Exame de Qualificação ao Mestrado, Topologia Geral, Semestre I de 2004, 12/07/2004
Nome: R.A.:
Assinatura:

Responder se cada uma das seguintes afirmações é **Verdadeira** ou **Falsa**, com uma curta justificativa.

1. A topologia produto Cartesiano em $\Pi_\alpha Y_\alpha$ é a menor topologia tal que $p_\beta : \Pi_\alpha Y_\alpha \to Y_\beta$ são todas contínuas.

2. Os racionais $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, com a topologia de subespaço da reta euclideana, são conexos.

3. Existe espaço topológico X, tal que a componente conexa de cada ponto $C(x) = \{x\}$, $\forall x \in X$, mas X não tem a topologia discreta.

4. Seja $f : X \to Y$ a aplicação $f(n) = \frac{1}{n}, f(0) = 0$, onde $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ com a topologia discreta e $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ subespaço da reta euclideana, então X é localmente conexo e f é uma bijeção contínua que fornece um exemplo de que conexidade local não é invariante sob aplicações contínuas.

5. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ com Y Hausdorff e X compacto é sempre aberta.

6. Uma aplicação injetora e contínua $f : X \to Y$ com Y Hausdorff e X compacto é aberta.

7. A interseção de qualquer família de conjuntos abertos e densos de um espaço topológico localmente compacto é densa.

8. A interseção de qualquer família enumerável de conjuntos densos de um espaço topológico localmente compacto é densa.

9. Considere a seguinte distância na reta real: $d(x,y) = |x - y|$. Seja $f : (\mathbb{R}; d) \to ((-1,1); d)$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Esse exemplo mostra que a imagem de um espaço métrico completo através de um homeomorfismo não é necessariamente completa.

10. O cilíndro circular reto e a faixa de Möbius sem fronteira tem o mesmo grupo fundamental.

Exame de Qualificação ao Mestrado, Topologia Geral, Semestre I de 2004, 12/07/2004
Nome: R.A.:
Assinatura:

Responder se cada uma das seguintes afirmações é **Verdadeira** ou **Falsa**, com uma curta justificativa.

1. A topologia produto Cartesiano em $\Pi_\alpha Y_\alpha$ é a menor topologia tal que $p_\beta : \Pi_\alpha Y_\alpha \to Y_\beta$ são todas contínuas.
2. Os racionais $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, com a topologia de subespaço da reta euclideana, são conexos.
3. Existe espaço topológico X, tal que a componente conexa de cada ponto $C(x) = \{x\}$, $\forall x \in X$, mas X não tem a topologia discreta.
4. Seja $f : X \to Y$ a aplicação $f(n) = \frac{1}{n}, f(0) = 0$, onde $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ com a topologia discreta e $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ subespaço da reta euclideana, então X é localmente conexo e f é uma bijeção contínua que fornece um exemplo de que conexidade local não é invariante sob aplicações contínuas.
5. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ com Y Hausdorff e X compacto é sempre aberta.
6. Uma aplicação injetora e contínua $f : X \to Y$ com Y Hausdorff e X compacto é aberta.
7. A interseção de qualquer família de conjuntos abertos e densos de um espaço topológico localmente compacto é densa.
8. A interseção de qualquer família enumerável de conjuntos densos de um espaço topológico localmente compacto é densa.
9. Considere a seguinte distância na reta real: $d(x, y) = |x - y|$. Seja $f : (\mathbb{R}; d) \to ((-1, 1); d)$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Esse exemplo mostra que a imagem de um espaço métrico completo através de um homeomorfismo não é necessariamente completa.
10. O cilíndro circular reto e a faixa de Möbius sem fronteira tem o mesmo grupo fundamental.