Departamento de Estatística - UNICAMP

Exame de Qualificação - Mestrado - 2004

Escolha **quatro** das seis questões desta prova para serem avaliadas. Explique todas as respostas. Cada questão deve ser respondida em folhas separadas. Os pontos de cada questão estão indicados nas mesmas.

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} I_{(0,1)}$$

a) Determine a estatística suficiente e completa para θ.

b) Calcule a Cota inferior de Cramer-Rao.

c) Ache um teste UMP de tamanho α para testar as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_a : \theta > \theta_0$, se tal teste existir.

d) Encontre um IC exato de 95% para θ.

2. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma densidade $\mathcal{P}(\theta)$ (Poisson, tal que $E(X_i) = \theta$).

a) Usando a definição de completitude mostre que $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ é uma estatística completa para θ.

b) Determine explicitamente o ENVUMV para

$$q(\theta) = \theta e^{-\theta}$$

c) Para n (tamanho da amostra) suficientemente grande, encontre um Intervalo de Confiança para θ^2.

3. Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória.

a) Verifique que sob as condições usuais de regularidade (permutabilidade entre derivação e integração), a função score de Fisher

$$S = S(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\theta, X),$$

satisfaz às seguintes propriedades:

1. $E_\theta(S) = 0$
2. $E_\theta(S^2) + E_\theta(S') = 0$, onde S' é a derivada de S em relação a θ.

Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$

b) Encontre a estatística escore Q_S para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_a : \mu \neq \mu_0$. Mostre que sob H_0 $Q_S \longrightarrow \chi_1^2$ em distribuição.

c) Encontre a estatística escore Q_W para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_a : \mu \neq \mu_0$. Mostre que sob H_0 $Q_W \longrightarrow \chi_1^2$ em distribuição.

Estatística Escore:

$$n^{-1}(S(\hat{\theta})^T I^{-1} S(\hat{\theta}))$$

Estatística de Wald:

$$ng(\hat{\theta})\Big(\frac{\partial g^T(\hat{\theta})}{\partial\theta} I^{-1}(\hat{\theta}) \frac{\partial g(\hat{\theta})}{\partial\theta}\Big)^{-1} g(\hat{\theta})$$

onde I^{-1} é a inversa da informação de Fisher para uma única variável aleatória, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $g(\theta) = \mu - \mu_0$, e

$$\frac{\partial g^T(\theta)}{\partial\theta} = \Big(\frac{\partial g(\theta)}{\partial\mu}, \frac{\partial g(\theta)}{\partial\sigma^2}\Big).$$

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória com distribuição igual a de X dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\alpha)/\beta} I_{(\alpha,\infty)}(x).$$

a) Determine a estatística suficiente para (α, β).

b) Obtenha o estimador de máximo verossimilhança (EMV) para (α, β) (não é necessário discutir que EMV é ponto de máximo).

c) Para $\beta = 1$, encontre um estimador não viesado para α.

d) $T = X_{(1)}$ é completa? Justifique. $X_{(1)}$ é o mínimo das observações.

5. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória com densidade $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

a) Enuncie os teoremas de Rao-Blackwell e de Lehmann-Scheffé

b) Para uma amostra de tamanho 2 de X, com dfunção de densidade dada por

$$f(x|\theta) = e^{\theta T(x) + a(\theta) + b(x)}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Mostre que $V = T(X_1) + T(X_2)$ é estimador não viciado uniformemente de mínima variância (ENVUMV) de $-2a'(\theta)$. **Sugestão**: Use a função geratriz de momento de V.

c) Obtenha um teste uniformemente mas poderoso (UMP) de nível α para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, indicando a região de rejeição.

d) Assuma que n é grande e $a''(\theta) \neq 0$, obtenha um Intervalo de Confiança assintótico para θ com coeficiente de confiança de 90%.

6. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de $X \sim U(a\theta, b\theta)$, com a e b constantes conhecidas.

a) Para $a = -1$e $b = 1$, encontre (se existir) um ENVUMV para θ. Justifique sua resposta.

b) Obtenha um estimador pelo método dos momentos para θ^2.

c) Com $a = 0$, $b = 1$, determine a estatística suficiente e completa para θ.

d) Para $a = -1$, $b = 1$. Ache um teste de tamanho α para testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

1. Uma v.a. Y com densidade $g(x)$ é dita ser estocásticamente maior que uma v.a. X com densidade $f(x)$ se $\mathbb{P}(Y > u) \geq \mathbb{P}(X > u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Prove que se a razão de verossimilhança $g(x)/f(x)$ é monotona crescente então Y é estocasticamente maior que X.

2. Seja X uma v.a. $U(0,1)$ e suponha que Y é independente de X com distribuição arbitrária. Mostre que a v.a. Z, que é a parte fracionária de $X+Y$ é uma v.a. $U(0,1)$.

3. Sejam X_n v.a.'s independentes com distribuição de Poisson com média a_n e $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Prove que se $a_n \to \infty$ então $S_n/\mathbb{E}(S_n) \to 1$ em probabilidade.

4. Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ distribuida uniformemente no quadrado unitário $\{(x,y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e seja $\mathbf{Z}$ independente de $\mathbf{X}$ e com a mesma distribuição. Ache a distribuição de $\mathbf{X} + \mathbf{Z}$.

5. Uma esfera de raio R contém N pontos os quais são independentemente e uniformemente distribuídos.

   (a) Ache a distribuição de X_N = distância do centro da bola ao ponto mais próximo.

   (b) Ache o limite desta distribuição quando $N/R^3 \to 4\pi\lambda/3$ onde $\lambda > 0$ é uma constante conheccida.