Exame de Qualificação - Doutorado
Álgebra Comutativa - 2º Sem/2003

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.

1. (3pts)(Anéis) Seja R um anel.

a) Mostre que: Se R é noetheriano e $I \subset R$ é um ideal tal que $dim_{Krull}(\frac{R}{I}) = 0$ então existe apenas um número finito de ideais maximais de R que contém I.

b) Supondo R noetheriano, enuncie o teorema para ideais principais de Krull. Usando tal teorema explique porque que um domínio noetheriano de dimensão de Krull $n \geq 2$ tem infinitos ideais primos de altura 1.

c) Mostre que: Se R é artiniano e $x \in R$ então: x é regular (ie, **não** divisor de zero) se e somente se x é uma unidade.

---

2. (3pts) (Módulos) Dado um anel R.

a) Sejam M e N R-módulos finitamente gerados, $I \subseteq J(R)$ ideal de R, onde $J(R)$ é o radical de Jacobson de R e $\sigma : M \to N$ um R-homomorfismo. Sabemos que $\overline{\sigma} : \frac{M}{IM} \to \frac{N}{IN}$ definida por $\overline{\sigma}(\overline{m}) = \overline{\sigma(m)}$ é um $\frac{R}{I}$-homorfismo. Mostre que:

$$\sigma \text{ é sobrejetora se e somente se } \overline{\sigma} \text{ é sobrejetora .}$$

b) Mostre que: Se M é um R-módulo não nulo tal que para todo $m \in M$, $m \neq 0$, tem-se que $\frac{M}{Rm}$ é R-módulo noetheriano então M é noetheriano.

c) Dizemos que um R-módulo M é simples se os únicos submódulos de M são os triviais, ie, $\{0\}$ e M. Mostre que: Se M é um R-módulo simples não nulo então existe um ideal maximal $\mathcal{M}$ de R tal que M é isormofo como R-módulo ao corpo $\frac{R}{\mathcal{M}}$.
(Sugestão: Mostre primeiro que M é principal)

3.(4pts) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas).

a) Se $(R, \mathcal{M})$ é anel noetheriano local então a dimensão de Krull de R é finita.

b) Se M e N são R-módulos e $M \otimes_R N = 0$ então $M = 0$ ou $N = 0$

c) Se K é um corpo finito e M é um R-módulo finitamente gerado, onde $R = K[X]$ é o anel de polinômios a uma variável sobre K, então o submódulo de torção, $T(M)$, de M é finito.
(Lembre que $T(M) = \{m \in M;\ \exists f \in R \setminus \{0\} \text{ tal que } fm = 0\}$).

d) Se K é corpo, $S = K[X, Y, Z]$ é o anel de polinômios a 3 variáveis sobre K e R é o subanel de S dado por $R = K[X^2 - Z, Y^2 - Z]$ então S/R é extensão integral.

BOA PROVA

DM–IMECC–UNICAMP, EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO

Análise Funcional, 10/07/2003

Aluno: ______________________________ RA: ____________

FAÇA NO MÍNIMO 04 (QUATRO) QUESTÕES.

1. Considere os espaços $BC(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n)\,;\, \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)| < \infty\}$, $C_c(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n)\,;\, \text{spt}.f$ é compacto$\}$ e $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n)\,;$ $f^{-1}(|x| \geq \epsilon)$ é compacto $\forall \epsilon > 0\}$, munidos da norma do supremo $||f||_{\sup} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$. Prove:

a) $BC(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach;

b) $C_{\cancel{c}}(\mathbb{R}^n)$ é o fecho do $C_{\cancel{0}}(\mathbb{R}^n)$. *Sugestão:* Use o Lema de Urysohn.
0 c

2. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Provar a equivalência dos três teoremas básicos da Análise Funcional enunciados a seguir:

Teorema da Aplicação Inversa: *Se T é uma bijeção contínua, então T^{-1} é contínua.*

Teorema da Aplicação Aberta: *Se T é contínua e sobrejetiva, então T é uma aplicação aberta, i.e. $T(G)$ é aberto (em F) para todo aberto G (em E).*

Teorema do Gráfico Fechado: *Se o gráfico de T é fechado (em $E \times F$), então T é contínua.*

Dicas:

a) Considere o diagrama ao lado; $N(T)$ denota o núcleo de T.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d] & F \\ E/N(T) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

b) A aplicação $S : G(T) \to E$, $(v, Tv) \mapsto v$, é uma bijeção; $G(T)$ denota o gráfico de T.

3. Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 estritamente convexa ($\varphi'' \geq c$, para alguma constante c positiva). Dada uma seqüência (u_n) em $L^\infty(\Omega)$ que converge para $u \in L^\infty(\Omega)$ na topologia fraca$-*$ do $L^\infty(\Omega)$ (lembre-se que o $L^\infty(\Omega)$ pode ser considerado como sendo o dual do $L^1(\Omega)$), prove que (u_n) converge fortemente em $L^2(\Omega)$

(na topologia da norma do $L^2(\Omega)$) se $\varphi \circ u_n$ converge fortemente para $\varphi \circ u$ em $L^1(\Omega)$. (Note que $\varphi \circ u_n$ e $\varphi \circ u$ estão bem definidas e pertencem ao $L^1(\Omega)$; de fato, elas pertencem ao $L^\infty(\Omega)$, logo ao $L^1(\Omega)$ já que Ω é limitado.)

4. Sejam E e F espaços de Banach e T_n e T operadores lineares e limitados de E em F. Dizemos que T_n converge fortemente para T ($T_n \to T$ fortemente) se $T_n x$ converge para Tx na topologia da norma de F para todo x em E. Prove que se $x_n \to x$ em E (topologia da norma) e $T_n \to T$ fortemente, então $T_n x_n \to Tx$ em F.

5. Prove que não existe norma em $C^\infty([0,1])$ que torne o operador derivação $\frac{d}{dx}f$ limitado. *Dica:* $f_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$.

6. Seja $K \in C([a,b] \times [a,b])$ e defina

$$S(f) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy.$$

Prove que $S : C([a,b]) \to C([a,b])$ é um operador compacto.

Sugestão: Use o teorema de Arzelá–Ascoli.

Exame de Qualificação - MM427 - 08/07/2003

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.

1. (3pts)(Anéis) Seja R um anel. Mostre que:

a) Se R é domínio que não é corpo e para todo elemento não nulo e não unidade x de R tem-se que $\frac{R}{(x)}$ é um anel finito, então R é noetheriano e $dim_{Krull}(R) = 1$. Dê um exemplo de um anel que satisfaz ta hipóteses.

b) Se $(R, \mathcal{M})$ é local e noetheriano com $Spec(R)$ infinito e existem $a, b \in R$ tal que $\mathcal{M} = \sqrt{(a, b)}$ entã $dim_{Krull}(R) = 2$

c) Se R é um domínio noetheriano com $dim_{Krull}(R) = 1$, todo ideal maximal de R é principal e I é u ideal radical e próprio (ie, $\sqrt{I} = I \subset R$) então I também é ideal principal.

---

2. (3pts) (Módulos) Sejam A um anel e M um A-módulo.

a) Mostre que: se $\varphi : M \longrightarrow M$ é um homomorfismo injetor de A-módulos e M é artiniano então φ isomorfismo. Dê um exemplo de que tal resultado não é verdadeiro se M não for artiniano.

b) Mostre, usando a propriedade universal, que: Se $I \subset A$ é ideal enão $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \frac{M}{IM}$. Conclua a part disto que se $I \subseteq J(A)$, onde $J(A)$ é o radical de Jacobson de A e M é finitamente gerado então: $M = 0$ se somente se $M \otimes_A \frac{A}{I} = 0$.

c) Dizemos que o A-módulo M é indecomponível se satisfaz: $M = M_1 \oplus M_2$, com M_1 e M_2 A-submódul se e somente se $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$. Se M é indecomponível e $\varphi : M \longrightarrow M$ é A-homomorfismo tal q $\varphi^2 = \varphi$ então $\varphi = 0$ ou $\varphi = I_M$, onde $I_M(m) = m$ para todo $m \in M$.

3.(4pts) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respost (respostas sem justificativas não serão consideradas).

a) Se M é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado e infinito então existe um número natural n tal que nM $\mathbb{Z}$-módulo livre de posto ≥ 1.

b) Se M e N são A-módulos e $\varphi : M \longrightarrow N$ é um A-homomorfismo sobrejetor então: M é finitamen gerado se e somente se $Ker(\varphi)$ e N são finitamente gerados.

c) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é transcendente sobre os números racionais e A é o subanel de $\mathbb{R}$ dado por $A = \mathbb{Z}[\alpha, \sqrt{}$ então existe $\mathbf{m} \in max(A)$ tal que a altura de $\mathbf{m}$ é 2.

d) Existe um domínio local e noetheriano $(R, \mathcal{M})$ com dimensão de Krull 2 e tal que a dimensão k-espaço vetorial $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}$ é 1, onde $k = \frac{R}{\mathcal{M}}$ é o corpo de restos de R.

e) Seja B/A é uma extensão de domínios tal que $A = K[y_1, \cdots, y_m]$, $B = K[x_1, \cdots, x_n]$ e K é corpo. Se $m > n$ então $\{y_1, \cdots, y_m\}$ é um conjunto algebricamente dependente sobre K.

INTRODUÇÃO À HOMOLOGIA, Exame de qualificação ao doutorado, 05/12/2003

Nome: RA:

Assinatura:

1. Seja M^n variedade compacta sem bordo

a) mostre que se né ímpar, então $\chi(M) = 0$

b) use a) para mostrar que se $n = 3$ e M não é orientável, então $\pi_1(M)$ é infinito.

c) a conclusão de a) vale se M não for compacta ou se $\partial(M) \neq \varnothing$?

2. Seja $V_{n,2} = [(e_1, e_2) = \delta_{i,j}\rangle$ e $p : V_{n,2} \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $p(e_1, e_2) = e_1$. Assume que p é uma ibração e que $p^{-1}(e_1) = S^{n-2}$

a) mostre que existe $s : S^{n-1} \to V_{n,2}$ com $p \circ s = id$ apenas no caso n par.

b) se n for par mostre que $\pi_k(V_{n,2}) \simeq \pi_k(S^{n-1}) \times \pi_k(S^{n-2})$.

c) calcule $H_k(V_{4,2}; \mathbb{Z})$.

3. Considere $S^2 \vee S^3$ (o espaço obtido identificando um ponto do S^2 com um ponto do S^3).

a) mostre que $\pi_2(S^2 \vee S^3) \simeq \mathbb{Z}$.

b) calcule $H_k(S^2 \vee S^3)$. (Sugestão: use uma decomposição celular).

4. Responder se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa fornecendo uma curta justificativa.

a) $\mathbb{C}P^3$ é uma variedade real, diferenciável, de dimensão 6 com $\pi_2\mathbb{C}P^3 \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_7\mathbb{C}P^3 \simeq \mathbb{Z}$

b) O fibrado tangente de $\mathbb{C}P^3$ é trivial.

(Cada ítem valem um ponto).

Exame de Qualificação. Introdução à Homologia. Julho , 2003.

Nome: RA:

Assinatura:

1. Seja $X = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x,y,z) \in R^3 : x = 0 = y, -1 \leq z \leq 1\}$. Calcule o grupo fundamental e a homologia de X.

2.Prove que o produto de duas variedades compactas sem bordo é orientável se e s se ambas são oriantáveis.

3. Seja CP^3 o espaço projetivo complexo. Considere as fibrações de Hopf $S^1 \to S^7 \to CP^3$ e $S^1 \to S^3 \to S^2$.

a. A partir delas calcule o terceiro grupo de homotopia de CP^3 e S^2.

b. Considere a decomposição celular de $CP^3 = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup e^6$. A partir dela calcule homologia de CP^3 com coeficientes inteiros.

são isomorfas

c. Mostre que as homologias com coeficientes inteiros de CP^3 e de $S^2 \times S^4$ mas que duas variedades não são homotopicamente equivalentes.

4. Seja $S^3 = \{(z,w) \in C^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ e o grupo das sétimas raizes da unidade $G = \{\alpha \in C : \alpha^7 = 1\}$. Considere a ação $G \times S^3 \to S^3$, com $a(z,w) = (\alpha z, aw)$.

a. Mostre que o quociente S^3/G é uma variedade e calcule o $\pi_1(S^3/G)$.

b. Mostre que qualquer função contínua de S^3/G no toro T^2 é homotópica à uma constante.

c. Mostre que qualquer função $f : RP^2 \to S^3/G$ é homotópica à uma constante.

d. Mostre que S^3/G é orientável.

e. Calcule a homologia de S^3/G com coeficientes inteiros.

Todo ítem vale um ponto. Total: 10 pontos.

Exame de Qualificação - Doutorado
Curvas Algébricas - 2º Sem/2003

Cada uma das questões vale **1 ponto**.

1) Sejam K um corpo, $P \in \mathbb{A}^n(K)$ e $V = \{P\}$. Mostre que o ideal de V é maximal.

2) Mostre que o conjunto $\{(t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$ não é algébrico.

3) Para $I = (Y^2 - X^2, Y^2 + X^2) \subseteq \mathbb{R}[X, Y]$, achar $\mathcal{V}(I)$ e $dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[X,Y]}{I}$.

4) Mostre que a curva $\mathcal{V}(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ é irredutível para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

5) Sejam $V = \mathcal{V}(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ e $\varphi : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow V$ definida por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Mostre que φ é bijetora mas não é um isomorfismo.

6) Calcular $I(P, E \cap F)$ onde:

$E = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$,
$F = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$ e
$P = (0, 0)$

7) Suponha que P é um ponto duplo para uma curva $F \in K[X, Y]$. Seja l uma tangente em P. Mostre que $I(P, l \cap F) \geq 3$.

8) Achar o gênero da curva sobre $\mathbb{C}$ dada pela equação:

$$(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$$

9) Dado D um divisor sobre uma curva $\mathcal{X}$ projetiva e não singular sobre $\mathbb{C}$. Seja $g =$ gênero de $\mathcal{X}$. Mostre que: se $deg(D) = 2g - 2$ e $l(D) = g$, então D é um divisor canônico.

10) Sejam $\mathcal{X}$ como em 9) e D um divisor. Considere $D' := W - D$ onde W é um divisor canônico. Mostrar que: $l(D) - l(D') = \frac{1}{2}(deg(D) - deg(D'))$

BRIEF CASE

Exame de Qualificacão de Geometria Riemanniana 05/12/2003.

Nome:

Assinatura BRIEF CASE

Responder se cada uma das seguintes afirmações é **verdadeira** ou **falsa**, dando uma curta justificativa e/ou um contraexemplo.

1. O conceito de transporte paralelo é equivalente ao conceito de conexão no fibrado tangente de uma variedade diferenciável.

2. Em uma variedade Riemanniana M a aplicação $\exp_p$ restrita à uma bola suficientemente pequena de T_pM é uma isometria.

3. Se um diffeomorfismo entre variedades Riemannianas preserva a curvatura secional então é uma isometria.

4. Seja $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $\gamma : [0,2\pi] \to S^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $\xi(t) = (0,0,1)$ o campo "vertical" ao longo de γ.

a) ξ é paralelo

b) ξ é Jacobi

c) ξ é Killing.

5. Seja $f : M \to \overline{M}$ imersão isométrica e α a sua segunda forma fundamental

a) α é um tensor (i.é., linear em relação às funções)

b) se $\alpha_p = 0$ para um $p \in M$ e $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ é uma geodésica com $\gamma(0) = p$, então $f \circ \gamma$ é uma geodésica em $\overline{M}$.

c) se $\alpha \equiv 0$ e $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ é uma geodésica, então $f \circ \gamma$ é geodésica.

6. Seja M uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e localmente simétrica (i.é., $\nabla_X R \equiv 0$)

então M é completa.

7. Seja M uma variedade Riemanniana

a) Se M é completa, $\forall p,q \in M$ existe uma geodésica minimizante entre p e q

b) Se $\forall p,q \in M$ existe uma geodésica minimizante entre p e q, então M é completa.

8. Seja M variedade Riemanniana simétrica. Então o "cut locus " coincide com o "conjugate locus ".

Exame de qualificação ao doutorado. **Geometria Riemanniana.** Semestre I 2003.

Nome: RA:

Assinatura:

Responder se cada uma das seguintes afirmações é **Verdadeira** ou **Falsa** com uma curta (menor ou igual a 5 linhas) justificativa. Respostas sem justificativa valem zero. Em todas as perguntas, M é uma variedade Riemanniana completa.

1. Se M não é compacta então $\forall p \in M$, existe geodésica $\gamma : [0,\infty) \to M$, com $\gamma(0) = p$, tal que $\gamma(t)$ é minimizante para todo t.

2. Existem dois mergulhos diferenciaveis, T_1 e T_2 do toro $S^1 \times S^1$ em R^3 tal que $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ e existe $p_1 \in T_1$ com a seguinte propriedade: o plano tangente de T_1 no ponto p_1 nunca é paralelo ao plano tangente de T_2 em p_2, para qualquer $p_2 \in T_2$.

3. Um diffeomorfismo entre superfícies compactas, simplesmente conexas que preserva a curvatura de Gauss, é sempre uma isometria.

4. Seja $\alpha : [0,1] \to M$ tal que a energia $E(\alpha)$ é mínima para toda variação própria de α, então α minimiza o comprimento.

5. (Contin.) Se α minimiza o comprimento então $E(\alpha)$ é mínima para toda variação própria de α.

6. Se o campo X é Killing em M e $\gamma(t)$ é uma geodésica em M então $X(\gamma(t))$ é Jacobi.

7. Se para toda geodésica γ de M o campo $X(\gamma(t))$ é Jacobi, então X é Killing.

8. Se a curvatura secional de M é não positiva então M não tem " cut points ".

9. Se a curvatura secional de M é sempre maior que 2, então M é compacta e 1-conexa.

10. Se a curvatura secional de M é maior que 2, $\pi_1(M) = \{0\}$, $\dim(M) \geq 6$, então M é difeomorfa à esfera.