Exame de Qualificação ao Mestrado, 08/07/2003
Álgebra Linear

Nome: ______________________________ **RA:** __________

Questão 1. Seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, com o produto interno usual. Sejam $v_1, \ldots, v_t \in V$ vetores não nulos e tais que os ângulos entre v_i e v_j, $i \neq j$, são todos iguais a $60°$. Mostrar que então $t \leq n$.
Dica: Considere o determinante de Gram dos vetores v_i.

Questão 2. Os vetores v_1, v_2, v_3 são a base canônica do espaço $V = \mathbb{C}^3$, com o produto interno usual. O operador linear T em V atua sobre os vetores da base na maneira seguinte: $T(v_1) = 3v_1 + ie_2$, $\quad T(e_2) = -ie_2 + 3e_1$, $\quad T(e_3) = 4e_3$, onde $i^2 = -1$.

(a) Qual a matriz de T na base canônica? Mostrar que T é autoadjunto.

(b) Encontrar os autovalores e os autovetores respectivos de T.

(c) Encontrar uma base ortonormal de V que consiste de autovetores de T. Qual a matriz de T nesta base?

Questão 3. No desenho, $V_1 \xrightarrow{R} V_2 \xrightarrow{S} V_3 \xrightarrow{T} V_4$, os espaços vetoriais (sobre $\mathbb{R}$), V_i, são todos de dimensão finita, e R, S, T são transformações lineares nos respectivos espaços.

(a) Mostrar que $p(TS) = p(S) - \dim(Im(S) \cap N(T))$.

(b) Mostrar que $p(TS) + p(SR) \leq p(S) + p(TSR)$ (desigualdade de Frobenius).

Aqui $p(T)$ é o posto de T, $Im(T)$ e $N(T)$ são a imagem e o núcleo de T, respectivamente.

Questão 4. Seja $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ uma matriz, $a, b \in \mathbb{C}$. Encontrar a forma canônica de Jordan de A, dependendo de a e b.

Questão 5. Responda **falsa** ou **verdadeira** a cada uma das afirmações abaixo. Justifique as suas respostas.

(a) Se T é um operador linear em $\mathbb{C}^n$, tal que $T^4 + 2T^3 + T^2 = 0$, então os blocos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ podem fazer parte da forma canônica de Jordan de T.

(b) Seja $V = \mathbb{R}[x]$ o espaço dos polinômios reais de uma variável x e sejam T e D os operadores lineares em V definidos por $T(f) = \int_0^x f(t)\,dt$, $D(f) = f'$ para todo $f \in V$. Então $TD = DT = Id$, a identidade de V.

(c) Se V é um espaço vetorial qualquer, então $V \cong V^*$, o seu dual.

(d) Se $\dim V = n < \infty$, então $V \otimes V^* \cong M_n$, o espaço das matrizes $n \times n$.

Boa Sorte!

1^o Exame de Qualificação do Programa de Mestrado

Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP

MM 720 - Análise no $\mathbb{R}^n$

11 de dezembro de 2003.

1. Enuncie o teorema da aplicação inversa. Enuncie e demonstre a forma local das submersões. A partir desta demonstração, estabeleça o teorema da aplicação implícita.

2. Dada uma aplicação de classe C^k, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ descreva a fórmula de Taylor de f a partir de um ponto $a \in U$. Descreva a fórmula de Taylor das funções do tipo: a) f linear; b) $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ bilinear simétrica (mostre claramente qual é a diferencial da φ no ponto (a, b) aplicada ao vetor (u, v)).

3. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ uma função que possui todas as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ num ponto $a \in U$, $U \subset \mathbf{R}^m$ aberto. Se não existirem pelo menos $m-1$ vetores v, linearmente independentes, tais que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, então f não é diferenciável no ponto a.

4. Defina uma 1-forma ω em $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ dada por:

$$\omega_{(x,y)} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy.$$

   Calcule a integral de ω ao longo de um círculo de raio r centrado na origem. Essa forma é exata? Mostre que o campo de vetores:

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

   não é o gradiente de nenhuma função.

5. Considere as variedades $N = \partial M$, com M compacta, $k+1$-dimensional. Seja $f : N \to W$ uma aplicação diferenciável entre variedades e ω uma k-forma fechada em W. Mostre que se f se estende para todo M então $\int_N f^*\omega = 0$.

Exame de Qualificação ao Mestrado
Álgebra Linear 09/12/2003

1. (1.5 pontos) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ um operador linear e suponha que para o polinômino $f(X) = (X-1)^2(X-2)^3$ temos $f(T) = 0$. Ache todas as possíveis formas de Jordan de T. Qual é o posto de T?

---

2. (1.5 pontos) Ache a forma de Jordan da matriz M e o posto de M para $M = A$ ou $M = B$ (ie, escolha uma delas apenas) onde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. (2 pontos) Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $T^2 = T$.

a) Demonstre que $\mathbb{C}^n = KerT \oplus ImT$;

b) Demonstre que T é normal se e somente se $KerT$ é perpendicular a ImT.

---

4. (2 pontos) Demonstre que o polinômio mínimo de um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tem grau 2 nos seguintes casos :

a) o posto de T é 1 e $n \geq 2$;

b) T é a projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre um seu subespaço W, onde $W \neq \mathbb{R}^n$ e $W \neq \{0\}$.

5.(3 pontos) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas)

a) Um operador linear $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é diagonalizável com respeito a uma base unitária (ortonormal) se e somente se T é normal.

b) Se $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um operador linear então $\mathbb{C}^n = Ker(T) \oplus Im(T)$.

c) Dada a matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, existem matrizes invertíveis reais $B_{3\times3}$ e $C_{4\times4}$ tais que $BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Todo operador linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ possui um autovetor.

e) Sejam $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear e $T^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o operador linear adjunto de T. Se $T^* \circ T = 0$ então $T = 0$.

f) Qualquer matriz real $n \times n$ é semelhante, via conjugação por matriz ortogonal, com a sua transposta.

Boa Sorte!

DM–IMECC–UNICAMP. EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO

Análise no $\mathbb{R}^n$, 10/07/2003

Aluno: ______________________________ RA: ____________

FAÇA NO MÍNIMO 04 (QUATRO) QUESTÕES.

1. Considere a função $f(x,y) = (x^2+y^2)\text{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ e diga se ela é contínua em $(0,0)$. Justifique sua resposta.

c) Diga se f é diferenciável em $(0,0)$. Em caso negativo, justifique. Em caso afirmativo, calcule a diferencial.

d) A origem é um ponto crítico de f? Em caso negativo, justifique. Em caso afirmativo, diga de que tipo e justifique sua afirmação.

2. Considere uma função escalar $f(x,y,z)$ duas vezes continuamente diferenciável. Suponha que a origem seja um ponto crítico de f e que a Hessiana de f na origem tenha a forma

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 0 & \mu & 43 \\ \pi & 43 & -13 \end{pmatrix}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$. Que tipo de ponto crítico é a origem? Justifique sua resposta.

3. a) Usando o Teorema de Stokes na sua forma mais geral ('$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ '), prove o Teorema de Stokes clássico:

$$`\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}\text{'}.$$

b) Mostre que que o campo de vetores $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ **não é o rotacional** de nenhum campo de vetores em $\mathbb{R}^3/\{(0,0,0)\}$. Aqui, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ e $r = ||\mathbf{r}||$.

4. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, seja $M(\mathbf{x})$ uma matriz $(n-1) \times n$ $(n \geq 2)$ cujas linhas definem campos de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Mostre que a equação $M(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ define uma curva $x = x(s)$ **em** $\mathbb{R}^n$ **para** $s \in \mathbb{R}$ numa vizinhança da origem, sendo $x(0) = \mathbf{0}$.

5. Seja o $\mathbb{R}^n$ equipado com um produto escalar $\langle\, , \rangle$ e seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Mostre que

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

se e somente se

$$\langle f'(z)h, h \rangle \geq 0, \quad \forall\, z, h \in \mathbb{R}^n .$$

Sugestão para uma das implicações: Escreva

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y - x))\, dt$$

e diferencie o integrando.

6. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq k$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde k é uma constante menor do que um, seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo.

Exame de qualificação em Topologia Geral, Julho de 2003.
Nome: RA:
Assinatura:

Responder se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa com uma curta (menor que 6 linhas) justificativa. Cada ítem vale um ponto.

Os subespaços topológicos abaixo são sempre subespaços de um dado espaço (arbitrário) T.

1. Os espaços X e Y no desenho abaixo, com a topologia induzida do espaço Euclideano R^2, são homeomorfos.

2. A interseção de dois subespaços compactos de T Hausdorff é sempre um compacto.

3. Na reta real com a topologia que tem como base os intervalos semi-abertos do tipo $[a,b)$, todas as funções lineares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

4. Uma bijeção contínua entre espaços métricos é sempre um homeomorfismo.

5. A aplicação antípoda da esfera S^1 é homotópica à id_{S^1}.

6. Existe aplicação de recobrimento de $S^1 \to S^1$, não homotópica à id_{S^1}.

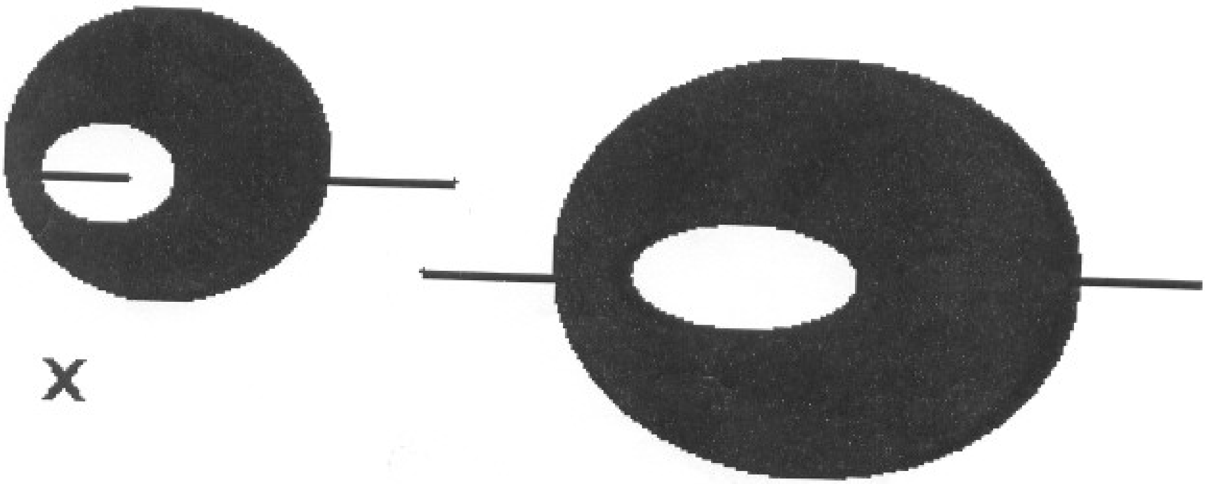
7. Existe aplicação de recobrimento de $S^2 \to S^2$, não homotópica à id_{S^2}.

7. RP^2 é homeomorfo com $D^2 \cup_f M^2$ onde f é uma identificação das duas fronteiras ambas homeomorfas com S^1.

8. Existe aplicação de recobrimento $S^1 \times S^1 \to S^2$.

9. Existe espaço topológico $X \neq \emptyset$ com $X \times X$ homeomorfo a X.

10. Seja X um espaço topológico compacto. Todo compacto $Y \subset X$ é fechado em X.



X

Y

Exame de Qualificação ao Mestrado, Topologia Geral, 05/12/2003
Nome: RA:
Assinatura:

1. Fornecer exemplos de

a) Subespaço topológico $X \subset \mathbb{R}^2$ cujo tipo de homotopia é o do círculo S^1, t.q., X separa o plano em duas componentes mas tal que X não é a fronteira de ambas essas componentes.

b) Curvas simples fechadas no toro e no plano projetivo$\mathbb{R}P^2$ (i) que separam (ii) que não separam.

2. Responder se cada uma das seguintes afirmações é **Verdadeira** ou **Falsa** fornecendo uma breve justificativa.

a) Existem aplicações contínuas $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ que não podem ser extendidas ao $\mathbb{R}$.

b) Qualquer aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}^n$, A fechado $\subset \mathbb{R}^k$, pode ser extendida ao $\mathbb{R}^k$.

c) A reta real com a topologia complemento finito é compacta.

d) As compactificações de um ponto $X \cup \{\infty\}, Y \cup \{\infty\}$ de dois espaços topológicos X e Y são homeomorfas apenas quando X, Y são homeomorfos entre si .

e) Para qualquer recobrimento F da reta $\mathbb{R}$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ (o número de Lebesgue de F) tal que $\forall U \subset \mathbb{R}$ com diámetro(U) $< \delta$, U está contido em algum elemento de F.

f) $[0,1) \times [0,1)$ é homeomorfo ao $[0,1] \times [0,1)$ com a topologia usual do $\mathbb{R}^2$.

g) As projeções $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ são sempre fechadas se X, Y são compactos.

h) A faixa de Möbius tem o mesmo grupo fundamental com o cilindro e é homeomorfa a ele.