Exame de qualificação

Janeiro de 2003

1. Considere v.a's $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ tais que $P[X_n = k/n] = 1/n$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que X_n converge em distribuição e identifique o limite.

2. Seja X uma variável aleatória tomando valores inteiros com função geradora de probabilidade $h(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Após observar X, realizamos X ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Denote por Y o número total de sucessos observados.

   (a) Determine a função geradora de probabilidade de Y.

   (b) Ache a função geradora de probabilidade de X dado que $Y = X$.

   (c) Suponha que as funções geradoras de (a) e (b) coincidem, mostre que a distribuição de X é Poisson.

3. (a) Seja $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_k \sim$ Poisson(2^{-k}). Mostre que vale o Teorema Central do Limite.

   (b) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que

   $$\begin{aligned} P(X_k = 1) &= P(X_k = -1) = \frac{1 - 2^{-k}}{2} \\ P(X_k = 2^k) &= P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

   Prove que vale a condição de Lindeberg (sem utilizar a condição de Lyapounov).

4. Seja (X, Y) um vetor aleatório com distribuição normal bivariada com média nula e matriz de covariância

   $$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Utilizando funções característica, ache a distribuição conjunta de $X + Y$ e $X - Y$.
   Explicite quais os resultados que você está utilizando.

(b) Mostre que qualquer vetor aleatório com distribuição normal bivariada pode ser obtido através de duas variáveis aleatórias i.i.d. $N(0,1)$.

(c) i. Mostre que

$$\mathbf{E}[\max(X,Y)] = [\frac{1-\rho}{\pi}]^{1/2}.$$

Obs.: $\max(X,Y) = (1/2)[X+Y+|X-Y|]$.

ii. Encontre $\mathbf{P}[X \geq 0, Y \geq 0]$.