Exame de Qualificação - MM427 - 29/07/2002

Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.

1. (3pts)(Dimensão de Krull) Seja A um anel.

a) Defina a dimensão de Krull de A.

b) Qual é a dimensão de Krull de um anel finito? Justifique sua resposta.

c) Dê um exemplo de um anel A com dimensão de Krull infinita.

d) Se $A = k[X, Y, Z]$ é anel de polinômios a 3 variáveis sobre o corpo k e $\wp$ é o ideal definido por $\wp = (X, Y)$. Qual é a dimenão de Krull de $A_\wp$? Justifique sua resposta.

e) Se $A = k[X, Y, Z, W]$ é anel de polinômios a 4 variáveis sobre o corpo k e I é o ideal definido por $I = (X - Y, Z^2 - W)$. Qual é a dimensão de Krull do anel $B = \frac{A}{I}$? Justifique sua resposta.

f) Sabe-se que o anel B, do item **e)**, é domínio e que L é o corpo de frações de B. Qual é o grau de transcendência de L sobre k? Justifique sua resposta.

---

2. (3pts) (Módulos) Seja A um anel

a) Considere o seguinte diagrama comutativo de A-módulos e A-homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \sigma_1 \downarrow & & \sigma_2 \downarrow & & \sigma_3 \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{h} & N_2 & \xrightarrow{t} & N_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Suponha que as linhas são exatas e mostre que: se σ_1 e σ_3 são isomorfismos então σ_2 também é.

b) Sejam $F = A^n$ o A-módulo livre de posto $n \geq 1$ e M um A-módulo. Mostre que:
Se $M \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$ é sequência exata de A-homomorfismos então existe $g : F \longrightarrow M$ A-homomorfismo tal que $f \circ g = I_F$ (I_F é a função identidade de F).

c) Sejam $S \subset A$ um sistema multiplicativo de A, M um A-módulo finitamente gerado e N um submódulo de M. Mostre que:
$S^{-1}N = S^{-1}M \iff$ existe $s \in S$ tal que $sM \subseteq N$. Conclua que $m_1, \cdots, m_r \in M$ gera $S^{-1}M$ se e só se existe $s \in S$ tal que $sM \subseteq Am_1 + \cdots + Am_r$.

3.(4pts) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas).

a) O anel $\mathbb{Z}_{36}$ tem exatamante 2 ideais primos e ambos são maximais.

b) Sejam M, N e K A-módulos com $M \neq 0$ (A anel). Se $M \otimes_A N \simeq M \otimes_A K$ então $N \simeq K$.

c) Se B/A é uma extensão de anéis com A sendo dominio fatorial e $B \subseteq K$, onde K é o corpo de frações de A, então B é A-módulo finitamente gerado se e sómente se $A = B$.

d) Seja $A = K[X, Y]$ o anel de polinômios a 2 variáveis sobre o corpo K. O ideal $m \subset A$ é maximal se e só se existem $a, b \in K$ tal que $m = (X - a, Y - b)$.

e) Existe M um A-módulo de comprimento finito igual a 3 com uma sequência saturada de A-módulos do tipo $0 \subset M_1 \subset M_2 = M$

g) Todo ideal primo **não** nulo do anel $A = \mathbb{Z}[\xi_n]$ é maximal, onde $3 \leq n \in \mathbb{N}$ e $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$ é a n-ésima raiz primitiva de 1.

BOA SORTE

D

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
ANÁLISE FUNCIONAL

JULHO DE 2002

QUESTÕES

1. Seja I um conjunto não vazio. Uma família $(\alpha_i)_{i\in I}$ de números reais maiores ou iguais a zero é dita ser *somável* se existe α real tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe $J(\epsilon) \subset I$ finito, de modo que,

$$\left|\sum_{i\in J} \alpha_i - \alpha\right| < \epsilon, \qquad \forall J \subset I, J(\epsilon) \subset J, \text{ } J \text{ finito}$$

Neste caso usamos a notação

$$\alpha = \sum_{i\in I} \alpha_i.$$

(a) Se $(\alpha_i)_{i\in I}$ é somável, mostre que existe $J \subset I$ enumerável, tal que $\alpha_i = 0$, para cada $i \in I \setminus J$.

Para fazer isto prove que existem subconjuntos finitos $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset I$, tais que

$$\left|\sum_{i\in J_n} \alpha_i - \alpha\right| < \frac{1}{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em seguida mostre

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

é o conjunto procurado.

(b) Para $p \in [1, +\infty]$ e $(E, \|.\|)$, seja

$$l_p(I, E) = \left\{(x_i)_{i\in I}; x_i \in E, i \in I, \|(x_i)_{i\in I}\|_p = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\}.$$

Mostre que $(l_p(I, E), \|.\|_p)$ é Banach, se E for Banach.

2. Mostre que a aplicação identidade de $(C([a, b]; \mathbb{K}), \|.\|_{L_1})$ em $(C([a, b]; \mathbb{K}), \|.\|_{L_\infty})$ tem gráfico fechado e não é contínua.

3. Sejam E um espaço normado e S um subespaço vetorial de E. Mostre que $x \in \overline{S}$ se, e só se, toda vez que $\phi \in E'$ se anular sobre S, tem-se $\phi(x) = 0$.

4. Ache um espaço de Banach E e uma seqüência $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E' tais que: $\|x'_n\| = 1$ para todo n natural, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 na topologia fraca estrela e toda combinação linear convexa dos x'_n s tem norma igual a 1.

5. Um subconjunto B de um espaço normado E é chamado *fracamente limitado* se, para cada $\phi \in E'$, o conjunto $\{\phi(x); x \in B\}$ é limitado em $\mathbb{K}$. Mostre que, se E for um espaço de Banach e $B \subset E$, B é fracamente limitado se, e só se, B é limitado.

Sugestão: Use o teorema de Banach-Steinhaus para as aplicações $A(x) \in (E')'$, onde $A(x)(\phi) = \phi(x)$, para $x \in E$ e $\phi \in E'$.

Exame de Qualificação **Homologia** **12/2002**

1. .

   (a) Enuncie, cuidadosamente, a sequência de Mayer-Vietoris par a cohomologia de DE Rham com suporte compacto $H_c^q(M)$.

   (b) Calcule $H^*(S^n)$, usando o item (a).

2. Calcule $H_c^*(\mathbb{R}^n)$, dando uma idéia de como provar o Lema de Poincaré para a cohomologia DE Rham com suporte compacto.

3. Defina um recobrimento bom de M e prove que se M é compacta tal recobrimento bom existe e pode ser tomado como sendo finito.

4. .

   (a) Enuncie o teorema de isomorfismo de Hurewiczs e o teorema dos coeficientes universais para $H^*(X, G)$ e defina precisamente Ext.

   (b) Calcule $\pi_q(S^n)$, $q \leq n$, e $\pi_3(S^2)$.

5. Defina a construção telescópio e mostre que $\mathbb{C}P^\infty$ é um espaço de Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Exame de Qualificação Doutorado **Introdução à Homologia**

02/08/2002

Nome:

RA:

1. .

   (a) Defina a seqüência exata de Mayer-Vietoris para a cohomologia de De Rham.

   (b) Calcule $H^*_{DR}(S^n, \mathbb{R})$ e $\pi_k(S^n)$, $k \leq n$.

   (c) S^4 pode ser difeomorfo a S^6?

2. .

   (a) Defina o conceito de fibrado vetorial real de dimensão n. É verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Existe um único fibrado vetorial trivial sobre S^2. Justifique sua resposta.

   (b) Enuncie o Teorema de isomorfismo de Thom e a classe de Thom para um fibrado vetorial real, orientado $\xi = \left(\mathbb{R}^n \cdots \to E \xrightarrow{\pi} B\right)$.

3. .

   (a) Enuncie os teoremas dos coeficientes universais, definindo precisamente Tor e Ext.

   (b) Enuncie o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern, definindo precisamente $\mathrm{Pf}(F_\nabla)$.

   (c) Calcule $\pi_3(S^2)$.

4. .

   (a) Defina a construção "telescópio".

   (b) Calcule $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$.

   (c) Mostre que $\mathbb{C}P^\infty$ é um espaço de Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}, 2)$.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO

EDP — 31/julho/2002.

Escolha 3 (três) das perguntas abaixo para responder. BOA PROVA!

#1. Seja $c = c(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função monótona não-decrescente. Mostre que existe no máximo uma solução suave $u = u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ da equação não-linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + c(u) = 0, & \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \times [0,T) \\ u = g, & \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Acima Ω é um domínio limitado de fronteira suave, $T>0$ é dado e $C^{2,1}$ significa C^2 em Ω e C^1 em $(0,T)$. Não é preciso mostrar existência, apenas unicidade.

#2. Sejam g, h funções suaves de variável real e de suporte compacto. Seja u solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, & \mathbb{R} \times \{t=0\} \\ u_t = h, & \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Defina a energia cinética e potencial como

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 \, dx,$$

$$p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 \, dx,$$

respectivamente. Mostre:

a) A energia total $E(t) = k(t) + p(t)$ é constante.

b) Se t_0 fôr suficientemente grande então

$$k(t) = p(t) \quad t \geq t_0.$$

(Isso se chama <u>equipartição</u> de energia.)

(Sugestão: use a Fórmula de d'Alembert.)

#3. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ suave e limitado. Seja $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$, $(\Omega_T = \Omega \times (0,T))$ solução de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + |\nabla u|^2 = 0, & \Omega_T \\ u = g, & \Gamma_T := \Omega \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

Mostre que:

a) $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$,

b) $\min_{\overline{\Omega_T}} u = \min_{\Gamma_T} u$.

#4. O operador biharmônico Δ^2 é dado por:

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_i \sum_j u_{x_i x_i x_j x_j}.$$

Uma solução fraca do problema

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f, & \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

é uma função $u \in H_0^2(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta v = \int_\Omega f v \quad \text{para todo } v \in H_0^2(\Omega).$$

Mostre, se $f \in L^2(\Omega)$ então existe uma e apenas uma solução fraca do problema $(*)$.

(Sugestão: Utilize o Teorema de Lax-Milgram, verificando suas hipóteses. Será necessário verificar que $\|\Delta u\|_{L^2}$ é equivalente a $\|u\|_{H^2}$ para $u \in H_0^2(\Omega)$.)

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
TEORIA DE NÚMEROS
13/12/2002

Classifique as 10 afirmações abaixo em verdadeiras e falsas. Justifique sua resposta de forma completa.

1. $\mathbb{Z}[\sqrt{53}]$ é integralmente fechado.
2. 53 não é um quadrado módulo 97.
3. Se R é um domínio, então $R[X]$ é um domínio de Dedekind se e somente se R é um corpo.
4. Seja S uma extensão inteira de um anel R (R é subanel de S e todo elemento de S é inteiro sobre R). Sejam $P_1 \subset P_2$ dois ideais primos de S. Se $P_1 \cap R = P_2 \cap R$, então $P_1 = P_2$.

Nos itens abaixo temos que F é um corpo de números e $\mathcal{O}$ o anel de inteiros algébricos, isto é, F é extensão finita de $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{O}$ é o fecho inteiro de $\mathbb{Z}$ em F.

5. Se para $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{O}$ temos $d =$ discriminante de$(x_1, \ldots, x_n)$ livre de quadrados, então $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma $\mathbb{Z}$–base livre de $\mathcal{O}$.
6. Seja F uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$ tal que o grupo das unidades de $\mathcal{O}$ é infinito. Então $F \subset \mathbb{R}$.
7. Todo ideal não nulo de $\mathcal{O}$ contém um número natural diferente de zero.
8. Se $[F : \mathbb{Q}] = p$ é um número primo, então $\mathbb{Z}$ é o único subanel integralmente fechado de F **estritamente** contido em $\mathcal{O}$.
9. Se os ideais primos de $\mathcal{O}$ são principais, então a ordem do grupo de classes de F é 1.
10. $\mathcal{O}$ é domínio de ideais principais se e somente se é domínio fatorial.

Exame de Qualificação

MA-693 Medida e Probabilidade
31 de julho de 2002

Escolha 5 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Enuncie a desigualdade de Doob, compare com a desigualdade de Chebychev. Use a desigualdade de Doob para mostrar que se $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ onde B_t é um movimento browniano, então para todo $a > 0$ temos:

$$\mathbb{P}\{S_t \geq at\} \leq \exp -\frac{a^2 t}{2}.$$

2. Defina variação quadrática de um processo estocástico. Mostre que a variação quadrática do movimento browniano é dado pelo processo determinístico t.

3. Dada uma aplicação contínua $f : K \to K$ com K um espaço topológico compacto, então a aplicação no espaço de medidas dada pela medida induzida $f_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ é contínua. Existe pelo menos uma medida de probabilidade μ que é invariante pela ação de f, i.e. $f_* \mu = \mu$. Discuta a relevância da compacidade nas duas provas.

4. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dado um espaço de Hilbert separável H, mostre que existe uma isometria $W : H \to L^2(\Omega)$ tal que $W(h)$ é uma variável aleatória gaussiana. Note que neste caso, W pode ser visto como um processo estocástico indexado no espaço H.

5. A partir da questão anterior, mostre que existe um processo estocástico (B_t) que tem incrementos gaussianos $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$ para $t > s$ e independentes. Conclua, usando o Critério de Kolmogorov que existe um processo contínuo satisfazendo as condições sobre os incrementos acima (i.e. existe movimento Browniano).

6. Defina os principais objetos envolvidos na decomposição em caos de Wiener:

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n;$$

onde $\mathcal{H}_n$ são os subespaços gerados pelos polinômios de Hermite H_n aplicados em gaussianas. Mostre as principais etapas da demonstração deste teorema.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO AO DOUTORADO
GEOMETRIA RIEMANNIANA
(IMECC-02/08/2002)

(1) Seja M uma variedade riemanniana. Suponha que existe um $\delta > 0$ tal que $\forall\ p \in M$, exp_p é definida na bola de raio δ em T_pM, e é um difeomorfismo desta bola sobre a imagem.

(a) Prove que M é completa.

(b) Mostre que existem variedades riemannianas completas para as quais não existe um $\delta > 0$ com a propriedade acima. (Sugestão: você pode colar pedaços de cilindros circulares (do $\mathbb{R}^3$) de raios convenientes.)

(2) Seja M uma variedade riemanniana difeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Mostre que M admite uma métrica completa com curvatura seccional positiva. Mostre que existe uma métrica com curvatura seccional $K \geq 1$. Uma tal métrica pode ser completa?

(3) Seja M uma variedade riemanniana. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, dando uma breve justificativa ou contra-exemplo:

(a) Sejam $p, q \in M$ e γ uma geodésica entre p e q. Se q não é conjugado a p ao longo de γ, então γ é minimal.

(b) Se $\forall\ p, q \in M$ existe uma geodésica minimal entre p e q, então M é completa.

(c) Se M é difeomorfa a $\mathbb{R}P^4$, então M é não-orientável.

(d) Se M é difeomorfa a $S^{275} \times \mathbb{R}P^{344}$, não existem métricas de curvatura seccional positiva em M.

(e) Se M é difeomorfa a $S^{275} \times S^{344}$, não existem métricas de curvatura seccional não-positiva em M.

(f) Se M é difeomorfa a $S^{275} \times S^{344}$, existem métricas de curvatura seccional não-negativa em M.