Exame Qualificação ao Mestrado - 29/07/02 - MM 719

Nome:———————————————RA:————

1.(2pts) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz, A, na base canônica é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encontre a forma de Jordan J de T.

b) Encontre $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = J$.

c) Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, onde v_1, v_2 e v_3 são respectivamente a 1ª, a 2ª e a 3ª coluna de P. Pergunta-se: Qual é a matriz de T na base β?

---

2. (2pts) Seja $T: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ o operador linear tal que o seu polinômio característico é $f_T(X) = (X-2)^4(X-1)^2$, o seu polinômio minimal é $P_T(X) = (X-2)^2(X-1)^2$ e $\dim(Ker(T-2I)) = 2$ (Lembre que $Ker(T-2I)$=núcleo de $T-2I$).

a) Encontre a forma de Jordan de T.

b) Pergunta-se: Com estes polinômios mínimo e característico seria possível supor $dim(Ker(T-2I)) = 1$?. Justifique sua resposta.

3.(2pts) Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{C}^n$, $n > 2$, com o produto interno usual $(<,>)$, $u, v \in V$ satisfazendo $< u, v >= 0$, $< u, u >=< v, v >= 1$ e W o subespaço de V gerado por $\{u, v\}$. Defina $T: V \longrightarrow V$ por $T(x) =< x, u > .v+ < x, v > .u$, para todo $x \in V$.

a) Mostre que: T é $\mathbb{C}$-linear, $Ker(T) = W^{\perp}$, $T(u) = v$ e $T(v) = u$

b) Encontre uma base ortonormal β de V tal que a matriz de T na base β seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(Sugestão: Olhe para $u+v$ e $u-v$)

c) Mostre que T é Hermitiano e $T^3 = T$.

---

4. (4pts) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique brevemente suas respostas (respostas sem justificativas não serão consideradas).

a) Seja $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear $\mathbb{C}$-linear então $Ker(T) \oplus Im(T) = \mathbb{C}^n$.

b) Dada uma matriz $A \in M_n(K)$, onde K é corpo, então A é semelhante a uma matriz triangular superior de $M_n(K)$ se e só se o seu polinômio caraterístico, $f_A(X)$, é da forma $f_A(X) = (X-a_1)^{d_1} \cdots (X-a_r)^{d_r}$ com $a_i \in K$ para todo i.

c) Existe um operador linear $T: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ tal que seu polinômio característico é $f_T(X) = (X^2+1)(X-2)^2(X-3)^2$ e seu polinômio minimal é $P_T(X) = (X-2)(X-3)^2$.

d) Uma matriz, $n \times n$, N que é nilpotente e **não nula** nunca é semelhante a uma matriz diagonal.

e) Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno (Hermitiano). Se $T \in \mathcal{L}(V,V)$ é operador normal, então T é unitário se e só se todo autovalor de T tem módulo 1.

f) Dados V, W $\mathbb{R}$-espaços vetoriais de dimenão finita. Existe $\varphi: V^* \otimes_{\mathbb{R}} W \longrightarrow \mathcal{L}(V,W)$ $\mathbb{R}$-linear tal que para todos $f \in V^*$, $w \in W$ e $v \in V$ tem-se: $\varphi(f \otimes w)(v) = f(v).w$.

BOA SORTE

Topologia 02/08/02

**Escolha*:i) Entre as questões 1,3 e 4 escolha duas; ii) Entre as questões 2 e 5 escolha uma. As questões 6,7 e 8 são obrigatórias

** *Tempo para resolução*: três horas.

1. Mostre que SO(n) é compacto e conexo.

2.Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico X .a)Mostre que $d(A, B) > 0$ se $B \subset X$ também for compacto e $A \cap B = \phi$.

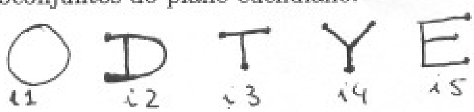
3.Mostre que toda aplicação $f : X \to S^n$ que não é sobrejetora é homotópica a uma constante.

4.Mostre que espaços de Hausdorff compactos são normais.

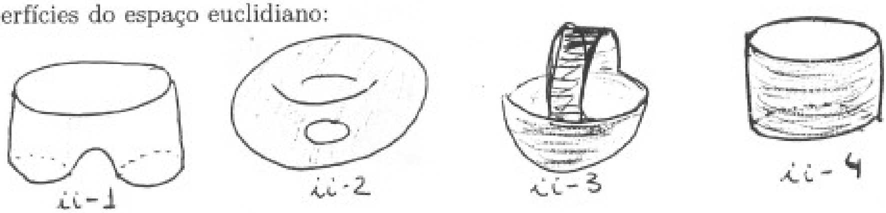
5.Um espaço topológico X é denominado homogêneo se para quaisquer x,y em X existir um homeomorfimo de X em X que leva x em y.Mostre que grupos topológicos são espaços homogêneos.

6.a)Particione os espaços topológicos abaixo nos subconjuntos dados pelas classes de equivalência da relação de homeomorfismo. b) Escolha dois espaços de um subconjunto para provar que são homeomorfos e dois de subconjuntos diferentes para provar que não são.

i)Subconjuntos do plano euclidiano:



ii) Superfícies do espaço euclidiano:



iii)O conjunto $R^2 - \{(0,0)\}$ no plano euclidiano.

iv)O espaço quociente de $[0,1]\times(0,1) \subset R^2$ dado pela relação de equivalência:

$(x, y) \sim (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \iff [x = \widetilde{x}$ e $y = \widetilde{y}]$ ou $[x = 0$ e $\widetilde{x} = 1$ e $\widetilde{y} = 1 - y]$ ou $[x = 0$ e $\widetilde{x} = 1$ e $\widetilde{y} = 1 - y]$

7) Identifique quatro espaços topológicos dentre os dados no exercício anterior que tenham o mesmo grupo fundamental não trivial. Justifique.

8) Verdadeiro ou Falso? Prove ou dê contra-exemplo:

a) Para A e B subconjuntos de um espaço topológico X :- $Interior(A) \cup Interior(B) = Interior(A \cup B)$

b) Para A e B subconjuntos de um espaço topológico X :- A e B homeomorfos $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ e $\overline{B}$ homeomorfos

c)O subconjunto do plano formado pelos pontos do quadrado $[0,1] \times [0,1]$ que tem pelo menos uma coordenada racional é conexo.