# Exame de qualificação de Probabilidade

21/01/2002

1. Seja $\{U_n\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição comum $U(0,1)$. Defina

$$X_n = \mathbb{1}(U_n \geq U_{n-1}).$$

Calcule

(a) a distribuição condicional de $X_{n+1}$ dado $X_n = i$, para $i = 0, 1$.

(b) $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n)$.

2. Seja $X$ uma variável aleatória discreta com valores em $\{1, 2, \ldots, k\}$ e probabilidade

$$\lambda_i = \mathbb{P}(X = i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dado $X = j$ selecionamos $Y_1, Y_2$ i.i.d. com densidade $f_j$ tal que

$$\int y f_j(y)\, dy = h(j).$$

Prove que $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Var}(h(X))$.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. tais que

$$\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2.$$

Mostre qye

$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^{n} k X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

quando $n \to \infty$.

4. Catástrofes ocorrem em tempos $T_1, T_2, \ldots$ onde $T_i = X_1 + \ldots + X_i$ e $X_1, X_2, \ldots$ são v.a.'s i.i.d. positivas. Seja

$$N(t) = \max\{n; T_n \leq t\}$$

o número de catástrofes ocorridas até o instante $t$. Prove que se $\mathbb{E}X_1 < \infty$ então $N(t) \to \infty$ e $\frac{N(t)}{t} \to \mathbb{E}X_1$ q.c. quando $t \to \infty$.

5. Seja o vetor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ cada v.a. $X_i$ com suporte $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ e defina

$$h_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \log \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)} = -\frac{1}{n} \log f(x_1, \ldots, x_n)$$

para $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$. Calcule $\mathbb{E}[h_n(\mathbf{X})]$ e mostre que $\mathbb{E}[h_n(\mathbf{X})] \leq \log m$ e o máximo é atingido quando todas as v.a.'s $X_i$ são uniformes em $A$.

6. Sejam $X$, $Y$ e $Z$ v.a.'s uniformemente distribuídas em $[0, 1]$. Qual a probabilidade que a equação quadrática $X\,t^2 + Y\,t + Z$ tenha duas raízes reais e distintas?

7. Sejam $X$ e $Y$ v.a.'s simétricas independentes e identicamente distribuidas e seja

$$S = sgn(XY) = \begin{cases} 1 & \text{se } XY > 0 \\ 0 & \text{se } XY = 0 \\ -1 & \text{se } XY < 0 \end{cases}$$

Mostre que $X$ e $S$ são v.a.'s independentes.

8. Sejam $X$ e $Y$ v.a.'s assumindo vaolres em $[0, 1]$ tendo função distribuição conjunta dada por:

$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2} min(x, y) + \frac{1}{2} x^2 y, \quad para \;\; (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

   (a) O vetor aleatório $(X, Y)$ é absolutamente contínuo?

(b) As distribuições marginais são absolutamente contínuas? Em caso positivo, encontre a função densidade de probabilidade de $X$.

(c) Encontre $E(X)$.

(d) Calcule $P(Y \leq \frac{1}{2} \,/\, X > \frac{1}{2})$.

9. Considere uma v.a. $X$ com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e seja $Z_n(u)$ o número de vezes que o dígito $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ aparece nas $n$ primeiras casa decimais de $X$. Mostre que:

$$P(lim_{n\to\infty}\frac{Z_n(u)}{n} = \frac{1}{10}) = 1.$$

10. Seja $U$ uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e seja $N$ uma v.a., independente de $U$, assumindo valores inteiros positivos. Considere então $X$ e $Y$ v.a.'s definidas, respectivamente, como sendo a parte inteira e a parte fracional do produto $NU$.

(a) Encontre a distribuição de $Y$.

(b) Mostre que $P(X = 0) = E(\frac{1}{N})$.

(c) Mostre que $X$ e $Y$ são v.a.'s independentes.

(d) Mostre que a covariância entre $X$ e $Y$ é $\frac{1}{12}P(X = 0)$.