Exame de Qualificação, Doutorado

MM-427, Álgebra Comutativa

30 de julho de 2001

Nesta prova todos os anéis considerados são comutativos com identidade.

1) Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo. Justifique suas respostas.

(a) Seja $R = k[X, Y, Z]$ o anel de polinomios a 3 variáveis sobre um corpo dado k. Se $I = (XY, XZ, YZ)$, então $I = \sqrt{I}$.

(b) Se M e N são R-módulos finitamente gerados e $M \otimes_R N = 0$ então $M = 0$ ou $N = 0$.

(c) Se M é R-módulo finitamente gerado e $N \subseteq M$ é submódulo tal que $M = N + JM$, onde J é o radical de Jacobson de R então $M = N$.

(d) Se R é um anel com um número finito de ideais maximais então a dimensão de Krull de R é finita.

2) Sejam R anel, M R-módulo e N_1, N_2 submódulos de M. Mostre que:

(a) $M/N_1 \cap N_2$ é Noetheriano, se M/N_1 e M/N_2 são Noetherianos.

(b) Se $N_1 \bigcap N_2 = 0$ então: M/N_1 e M/N_2 são noetherianos se e só se M é noetheriano.

(c) Se $N_1 \bigcap N_2 = 0$, M/N_1 e M/N_2 são noetherianos, então N_1 e N_2 são noetherianos.

(d) Dê um exemplo de um R-módulo não noetheriano M que contém dois submódulos N_1 e N_2 tais que M/N_1 e M/N_2 são noethterianos.

3) Calcule a dimensão de Krull do anel R nos seguintes casos:

a) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

b) $R = \dfrac{k[X, Y, Z]}{(X^2 - Y, Y^2 - X)}$, onde $k[X, Y, Z]$ é anel de polinômios a 3 variáveis sobre o corpo k.

c) (R, m) é anel local noetheriano com ideal maximal m que satisfaz:

$$\dim_k \left(\frac{m}{m^2}\right) = 2, \text{ onde } k = \frac{R}{m}$$

e $ht(m) \geq 2$ ($ht(m)$ denota a altura de m).

Boa prova!

Exame de Qualificação ao Doutorado

MM-427, Álgebra Comutativa

14 de dezembro de 2001

Nesta prova todos os anéis considerados são comutativos com identidade.

Questão 1. a) Dar a definição de *dimensão de Krull* de um anel A. Dar exemplo de um anel A cuja dimensão de Krull seja infinita.

b) Qual a dimensão de Krull de um anel artiniano? Justifiquem as suas respostas.

Questão 2. Calcular a dimensão de Krull dos seguintes anéis:

a) $k[x_1, x_2, (x_1 + x_2)^{-1}]$, onde k é um corpo;

b) $\mathbb{Q}[\sqrt{7}, i]$.

Questão 3. Seja A um anel noetheriano e local com ideal maximal I e seja $J = \cap_{k \geq 1} I^k$. Demonstrar que $IJ = J$. Utilizando-se este fato, mostrar que $J = 0$.

Questão 4. a) Dar a definição de um A-módulo *noetheriano*.

b) Seja $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$ uma seqüência exata de A-módulos. Mostrar que V é noetheriano se e somente se V_1 e V_2 são noetherianos.

Questão 5. a) Dar a definição de um A-módulo *artiniano*.

b) Seja $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$ uma seqüência exata de A-módulos. Mostrar que é artiniano se e somente se V_1 e V_2 são artinianos.

Questão 6. a) Dar a definição de *produto tensorial* de dois A-módulos V_1 e V_2.

b) Se A é um corpo e $\dim_A V_1 < \infty$, $\dim_A V_2 < \infty$, qual a dimensão $\dim_A(V_1 \otimes_A V_2)$? Justifique a sua resposta.

Questão 7. a) Dar a definição de uma *seqüência exata* de A-módulos.

b) Seja $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} V_2 \longrightarrow 0$ uma seqüência exata de A-módulos. Se V_2 é um A-módulo livre, demonstrar que existe um homomorfismo de A-módulos $\beta \colon V_2 \longrightarrow V$ tal que $\alpha\beta = id_{V_2}$.

Questão 8. a) Dar a definição de *decomposição primária*.

b) Seja $0 = I_1 \cap \ldots \cap I_s$ a decomposição primfria mínima de 0 em um anel noetheriano A. Se $\sqrt{I_i} = P_i$, qual o nil-radical de A em relação aos ideais $P_1, P_2, \ldots, P_s$?

Questão 9. Dar a definição de um anel *noetheriano* A. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? (Justifique as suas respostas!)

a) Se A é noetheriano, então $A[x]$ também é.

b) Se A é noetheriano, então $A[[x]]$ não necessariamente é noetheriano.

c) Se $A[x]$ é noetheriano, então A é noetheriano.

Questão 10. Dar exemplo de um anel que não é artiniano nem noetheriano. Existe um anel artiniano que não seja noetheriano? (Justifique a sua resposta!)

Questão 11. Enunciar o teorema de Normalização de Noether. Utilizando este teorema, calcular a dimensão de Krull de $k[x^2, y^3, xy]$, onde k é um corpo.

Boa prova!

INTRODUÇÃO À HOMOLOGIA

EXAME DE QUALIFICAÇÃO, AGOSTO 2001.

1. Seja M^3 uma variedade compacta conexa e sem bordo.

   (a) Prove que a característica de Euler Poincaré de M^3 é nula.

   (b) Prove que, se M^3 é não-orientável, então tem grupo fundamental infinito.

2. Seja $G = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n$. Considere a ação propriamente descontínua de G sobre $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ dada por $\omega(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega z_2)$. Seja L_n o espaço quociente.

   (a) Mostre que L_n é orientável.

   (b) Calcule $\pi_k(L_n)$, $k = 1, 2, 3$.

   (c) Calcule a homologia a coeficientes inteiros de L_n.

3. Seja $\phi : S^n \to S^n$ uma aplicação contínua de grau k não nulo. Considere o espaco X obtido colando-se a S^n um disco e^{n+1} com função de colagem ϕ.

   (a) Calcule os grupos de homologia (coeficientes inteiros) de X.

   (b) Construa um espaço topológico *conexo* cuja homologia 5- dimensional é isomorfa a $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}$ e todos os grupos de homologia m-dimensionais são nulos, $m \neq 0, 5$.

Observações:

1. Na resolução de um exercício, o aluno poderá usar os resultados de outros, mesmo não resolvidos.
2. Está autorizada a consulta de livros e apontamentos pessoais.

1^o Exame de Qualificação do Programa de Doutorado

Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP

MM 692 - Análise Real II

17 de dezembro de 2001.

1. a) Se μ for uma medida de Radon no espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ e $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$ então $d\nu = f\, d\mu$ também é uma medida de Radon.

   b) Enuncie o teorema da representação de Riesz para o espaço $C_0^*(X)$.

   c) Usando a isometria do item anterior e a decomposição de Jordan de medidas mostre que dado uma funcional linear $I \in C_0(X)^*$, existe uma única decomposição $I = I^+ - I^-$ onde I^+ e I^- são funcionais positivos com $\|I\| = \|I^+\| + \|I^-\|$.

2. a) Demonstre o lema de Riemann-Lebesgue: a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, além disso é um operador linear contínuo.

   b) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\int f\widehat{g}\, dx = \int \widehat{f}g\, dx$. Por que $f\widehat{g}$ e $\widehat{f}g$ são integráveis?

   c) Enuncie o teorema da transformada de Fourier inversa no caso $f, \widehat{f} \in L^1$. Conclua que: 1) sob essas hipóteses, alterando os valores da f em um conjunto de medida zero, ela pode torna-se uma função contínua, 2) a transformada de Fourier em L^1 é injetora.

3. Defina medida e dimensão de Hausdorff de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que se A tem dimensão de Hausdorff p então $A \times A \subset \mathbb{R}^{2n}$ tem dimensão de Hausdorff $2p$.

4. Se G é o subgrupo de $Gl^+(2, \mathbb{R})$ dado por:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{com } x > 0, y \in \mathbb{R} \right\},$$

mostre que $x^{-2}dx\ dy$ é uma medida de Haar invariante a esquerda e $x^{-1}dx\ dy$ é uma medida de Haar invariante a direita. Mostre que existem Borelianos que possuem medida de Haar a esquerda finita, mas medida de Haar a direita infinita.

EXAME de QUALIFICAÇÃO – DOUTORADO
ANÁLISE FUNCIONAL I 01/08/2001

1. Sejam E um espaço de Banach, M $\subset$ E um subespaço próprio de E e $T: M \to \ell^\infty$ uma aplicação linear contínua. Prove que existe uma aplicação linear contínua $S: E \to \ell^\infty$ que estende T e tal que $\| S \| = \| T \|$
Enuncie cuidadosamente os teoremas importantes da Análise Funcional utilizados na resolução.

2. Sejam $(H, \langle \ \rangle)$ um espaço de Hilbert, $T: H \to H$ um operador linear contínuo de posto finito igual a 1 e seja v $\in$ Im (T) com v $\neq$ 0. Mostre que existe y em H tal que T (x) = $\langle$ x , y $\rangle$ v , para todo x em H e que $\| T \| = \| y \| \| v \|$

3. a) Sejam $(H, \langle \ \rangle)$ um espaço de Hilbert e $T: H \to H$ um operador linear tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo x e y em H. Prove que T é continuo.

b) Considere o seguinte operador linear $S: \ell^2 \to \ell^2$ definido por $S(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\ldots)$.
   i) S verifica a condição: $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ para todo x e y em ℓ^2 ?
   ii) S é contínuo ?

4. Seja E um espaço normado.
   a) Dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n \geq 1}$ é <u>fracamente de Cauchy</u> em E se $(\varphi(x_n))_{n \geq 1}$ é de Cauchy, para cada φ no dual E'. Mostre que se $(x_n)_{n \geq 1}$ é fracamente de Cauchy então $(x_n)_{n \geq 1}$ é limitada em E.

   b) Dizemos que E é <u>fracamente completo</u> se cada seqüência fracamente de Cauchy em E converge fracamente para algum ponto de E.
   Mostre que se o espaço E é reflexivo então E é fracamente completo.

5. a) Determine se o operador linear definido no exercício 3.b) é compacto, justificando.

   b) Seja T : E $\to$ E é um operador compacto. Se E tem dimensão infinita mostre que $0 \in \sigma(T)$, isto é, 0 é um valor espectral de T.

EXAME de QUALIFICAÇÃO – DOUTORADO
ANÁLISE FUNCIONAL I 17/12/2001
MM-425

1. Um subconjunto A de um espaço normado E é totalmente limitado se, para cada $\varepsilon > 0$ existem $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i;\varepsilon)$

   Suponha que a bola unitária fechada de um espaço normado E é totalmente limitada. Prove que E tem dimensão finita. (sugestão: use o lema de Riesz).

2. Seja E um espaço normado separável de dimensão infinita.

   a) Mostre que existe uma sequência $(M_k)_{k=1}^{\infty}$ de subespaços de dimensão finita tais que $M_k \subset M_{k+1}$, para todo k, e $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ denso em E.

   b) Usando o Teorema de Hanh-Banach prove que existe uma sequência $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset E'$ tal que $\|\varphi_k\| = 1$, para todo k, e $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ para cada x em E.

3. Considere o espaço de Banach $(\ell^{\infty};\| \|_{\infty})$ e seja $\| \|$ uma outra norma em ℓ^{∞} tal que $(\ell^{\infty};\| \|)$ é completo. Suponha que, para cada j, a aplicação $\varphi_j : (x_i)_{i=1}^{\infty} \to x_j$ é contínua na norma $\| \|$. Use o Teorema do Gráfico Fechado para provar que $\left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\| \le \left\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \cdot c$, $c > 0$

4. a) Dado um espaço de Hilbert H e uma sequência $(x_n)_{n\ge 1}$ em H, prove que $x_n \to x$ na norma de H se, e somente se, $x_n \to x$ na topologia fraca de H e $\|x_n\| \to \|x\|$.

   b) Se $e_n = (0,0,\ldots\ldots,\underset{n}{1},0,0,\ldots\ldots)$ mostre que a sequência $(e_n)_{n\ge 1} \subset \ell^2$ converge para zero na topologia fraca. $e_n \to 0$ na norma de ℓ^2 ? Justifique

5. Sejam E um espaço de Banach reflexivo e F um espaço de Banach tal que, para toda sequência $(y_n)_{n\ge 1}$ em F, se $y_n \xrightarrow{w} 0$ então $y_n \to 0$. Seja $T: E \to F$ uma aplicação linear contínua. Prove que T é compacta.

EXAME de QUALIFICAÇÃO, VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

#1| Considere $\mathcal{U}(2) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ o grupo das matrizes 2×2 unitárias, i.e. $A \in \mathcal{U}(2)$ sse $\underbrace{A \cdot \bar{A}^t = \mathbb{I}d}$. Determine a dimensão de $\mathcal{U}(2)$.

#2| Dado G um grupo de Lie e $g \in G$ define-se $L_g : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ h \longmapsto g*h \end{array}$ a translação à esquerda por g. Mostre que L_g é um difeomorfismo.

#3| Dado G um grupo de Lie, um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^\infty(G)$ é dito "invariante à esquerda" sse $\forall g, h \in G$ $(DL_g)_h \cdot X(h) = X(g*h)$
Mostre que o espaço vetorial dos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre um grupo de Lie G é isomorfo à T_eG.

#4| Mostre que o colchete de Lie do dois campos invariantes à esquerda é invariante à esquerda.

#5| Uma k-forma diferencial ω sobre um grupo de Lie é chamada "invariante à esquerda" se $\forall g \in G$, $L_g^* \omega = \omega$. Chame de $\Lambda_L^k(G)$ o espaço vetorial das k-formas invariantes à esquerda sobre G. Fixado $\upsilon \in (T_eG)^*$ definimos, para $g \in G$ e $v \in T_gG$:

$$\Theta_\upsilon(v) = \langle \upsilon, (DL_{g^{-1}})_g\, v \rangle$$

Mostre que Θ_υ é uma 1-forma diferencial em G, invariante à esquerda e que $\upsilon \longmapsto \Theta_\upsilon$ é um isomorfismo linear de $(T_eG)^*$ e $\Lambda_L^1(G)$.

BÔNUS: $\Lambda_L^*(G)$ é algebra exterior c/ respeito à $\wedge$?

$\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$

$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega$

$\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$

#6| Em que sentido os teoremas integrais clássicos do cálculo vetorial (Gauss, Green, Stokes e o Teo. da Divergência) são casos particulares do Teo de Stokes demonstrado no curso de variedades?

Obs: Não há a mais remota expectativa de você fazer essa prova inteira! Faça o que der em 3 horas. BOA SORTE! MILTON.

Exame de Qualificação, Doutorado
MM-444, Álgebra não Comutativa
30 de julho de 2001

Questão 1. Seja R o subconjunto das matrizes de ordem 2,

$$R = \{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{Q} \},$$

onde $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são, respectivamente, os inteiros e os racionais.

a) Mostrar que R é um sub-anel do anel das matrizes de ordem 2 sobre $\mathbb{Q}$.

b) Mostrar que R é noetheriano à direita.

c) Mostrar que R não é noetheriano à esquerda.

Questão 2. Seja p um número primo e seja G um grupo de ordem p^3. Se K é um corpo de característica p, mostrar que o radical de Jacobson $J(KG)$ da álgebra do grupo G coincide com o conjunto

$$J(KG) = \{ \sum_{i=1}^{p^3} a_i g_i \mid a_i \in K, \sum a_i = 0 \}$$

onde $g_1, g_2, \ldots, g_{p^3}$ são os elementos do grupo G.

Questão 3. Seja R um anel, $1 \in R$. Mostrar que se R é artiniano (à direita) e não contém divisores de zero, então R é um anel com divisão.

Questão 4. Seja $A = \mathbb{Z}_{36}$ o anel dos inteiros módulo 36 e seja $R = M_2(A)$ o anel das matrizes de ordem 2 com entradas de A.

a) Calcular o radical de Jacobson $J(A)$ de A.

b) Calcular o radical de Jacobson $J(R)$ de R.

Questão 5. Responda **falsa** ou **verdadeira** à cada uma das perguntas abaixo. Justifique as suas respostas.

a) Se R é um anel artiniano, então o radical de Jacobson $J(R)$ coincide com o radical de Baer $\beta(R)$ de R.

b) Seja R um anel e seja S um sub-anel de R. Se o radical de Jacobson $J(R)$ de R é igual a 0, então $J(S) = 0$.

c) Seja R é um anel com 1 e semi-primo e seja I um ideal (bilateral) de R. Se $r \in R$, então $Ir = 0$ se e somente se $rI = 0$.

d) Seja $A = M_n(K)$ a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo K. Existe uma base do espaço vetorial A (sobre K) que consiste de matrizes nilpotentes.

Boa prova!