ANÁLISE NO R^N

1) (valor: 1.5) Seja $f : R^N \to R$ uma função diferenciável e suponha que exista uma função continua $g : R^N \to R$ tal que

$$grad\, f(x) = g(x)x$$

para todo $x \in R^N$. Mostre que f é constante em esferas centradas na origem.

2) (valor: 2.0) Considere os espaços R^N e R^M com normas $|.|$ e $||.||$, respectivamente, e seja

$$T : R^N \to R^M$$

uma transformação linear.

Mostre que T é injetiva se e somente se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$||Tx|| \geq c|x|$$

para todo $x \in R^N$.

Se isso ocorrer, isto é, se T for injetiva, o que se pode dizer das dimensões N e M?

3) (Valor: 2.5) Considere o espaço R^N com uma norma $|.|$ e seja

$$B = \{x \in R^N : |x| \leq r\}, \;\; r > 0.$$

Sejam $0 < k < 1$ uma constante e $f : R^N \to R^N$ uma função de classe C^1 satisfazendo às seguintes condições :

1) $|Df(x)| \leq k$ para todo $x \in R^N$;

2) $|f(0)| \leq r(1-k)$.

Mostre que a equação $f(x) = x$ tem uma e uma só solução $x \in B$, enunciando os teoremas utilizados.

4) (valor: 2.0) Seja $f : R^2 \to R^2$ definida por

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

Mostre que f é localmente invertivel, enunciando o teorema utilizado.

Mostre também que f não possue inversa definida no espaço todo.

5) (valor: 2.0) Considere o espaço R^N com o produto escalar habitual (x, y). Sejam $T : R^N \to R^N$ uma transformação linear invertivel e B_r a bola centrada na origem e com raio $r > 0$. Mostre que

$$\int_{T^{-1}(B_r)} e^{-(Ty,Ty)}\, dy = |det(T^{-1})| \int_{B_r} e^{-(x,x)}\, dx.$$

Fazendo r tender para infinito, calcule a integral

$$\int_{R^N} e^{-(Ty,Ty)}\, dy.$$

Lembrete:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}.$$

EQUACOES DIFERENCIAIS ORDINARIAS

M9

1) Ache duas soluções do problema

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x} \quad x(0) = 0$$

e explique porque o teorema de unicidade não se aplica nesse caso.

2) Ache a solução do sistema

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{y} = 2y + x^2$$

em função da condição inicial (a, b). Em seguida mostre que o conjunto dos pontos (x, y) do R^2 tais que $4y = -x^2$ é invariante pelo fluxo.
Sugestão para resolver o sistema: resolva a primeira, jogue o resultado na segunda e use a formula da variação das constantes para equação escalar.

3) Utilizando o Teorema de Hartman desenhe o retrato de fase do sistema plano

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + xy^3$$

$$\frac{dy}{dt}\;\frac{dx}{dt} = x - 2y - xy$$

numa vizinhança da origem.

4) Considere o sistema:

$$\dot{x} = -2y + 4x - x(x^2 + 4y^2)$$

$$\dot{y} = 2x + 4y - y(x^2 + 4y^2).$$

a) Mostre que $(0, 0)$ é o único ponto de equilibrio.
Sugestão: multiplique a primeira equação por x, a segunda por y e some as duas.
b) Mostre que se c for grande, então nas circunferencias $x^2 + y^2 = c$ o campo aponta para dentro.
Lembrete: $x^2 + y^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4(x^2 + y^2)$.
c) Mostre que o sistema acima tem uma solução periodica, enunciando o teorema utilizado.

Variável Complexa 19

EXAME DE QUALIFICAÇÃO

JULHO-2.001

(1) Mostre que se f é holomorfa sobre $\mathbf{C}$ e $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = b \in \mathbf{C}$, então f é constante.

(2) Seja f holomorfa num aberto conexo A. Mostre que se $Re(f)$, $-Re(f)$ ou $|Re(f)|$ atingir o máximo em algum ponto de A, então f é constante.

(3) Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+16)^2}.$$

4. Se m, n são números naturais e $|a| < 1$, ache o número de zeros da função

$$F(z) = z^m \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^n - a$$

na bola $B_1(0)$.

(5) Ache a série de Laurent, ao redor de 0, de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

em $A_{1,2}(0)$.

Exame de Qualificação, Mestrado

MM-443, Representação de Grupos

30 de julho de 2001

Questão 1. a) Descrever, a menos de isomorfismo, todos grupos de ordem 8.

b) Descrever, a menos de isomorfismo, todos grupos abelianos de ordem 72.

Questão 2. Seja G um grupo de ordem 255.

a) Mostrar que G possui um subgrupo normal H de ordem 17.

b) Mostrar que o grupo quociente G/H é cíclico.

c) Mostrar que G é um grupo cíclico.

Questão 3. a) Mostrar que, a menos de isomorfismo, existe um único grupo não abeliano de ordem 6.

b) Mostrar que os grupos S_3 e D_3 são isomorfos.

c) Descrever as representações irredutíveis do grupo D_3.

d) Descrever os caracteres das representações irredutíveis do grupo D_3.

Questão 4. Na tabela abaixo constam alguns dados sobre o grupo simétrico S_4.

tipo cíclico	1	(12)(34)	(12)	(123)	(1234)
conjugados	1	*	*	*	*
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	*	*	*	*
χ_3	2	2	*	-1	*
χ_4	3	*	-1	*	*
χ_5	*	*	*	*	*

Na primeira linha da tabela constam os representantes das classes de conjugação em S_4. Na segunda linha são as cardinalidades de cada classe. Depois, χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 e χ_5 são caracteres irredutíveis e distintos de S_4. (São dados alguns dos seus valores respectivos.)

a) Preencher a segunda linha da tabela e mostrar que S_4 possui somente 5 caracteres irredutíveis.

b) Mostrar que o grupo S_4 possui somente duas representações não equivalentes de dimensão 1, e preencher a linha do caracter χ_2.

c) Preencher a linha do caracter χ_3.

d) Preencher as últimas duas linhas da tabela.

Questão 5. Responda **falsa** ou **verdadeira** à cada uma das perguntas abaixo. Justifique as suas respostas.

a) Existem grupos não abelianos de ordem 35.

b) Para todo divisor d de 24, existe um subgrupo de S_4 cuja ordem é igual a d.

c) O grupo $\mathbb{Z}_{12}$ possui representações irredutíveis de dimensão 2 sobre os complexos.

d) Se G é um grupo tal gue $g^2 = e$ para todo $g \in G$, então G é abeliano.

Boa prova!

Exame de Qualificação do Mestrado

Análise no $\mathbf{R}^n$

01/08/01

1. (a) (0,5) Seja A um aberto de $\mathbf{R}^n$, e seja $f : A \to \mathbf{R}^m$. Defina quando f é diferenciável num ponto $a \in A$.

(b) (1,5) Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(0,0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{|\mathrm{x}|^{\mathrm{p}}|\mathrm{y}|^{\mathrm{p}}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2} \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

sendo $p \in \mathbf{R}$, $p > 0$. Determine para que valores de p a função f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^1, e seja $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = (x + f(y), y + f(x)) \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

(a) (1,0) Calcule $DF(x,y)(h,k)$ para todo $(x,y),(h,k) \in \mathbf{R}^2$.

(b) (1,0) Suponhamos que exista α, $0 < \alpha < 1$, tal que $|f'(x)| \leq \alpha$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Prove que existe β, $0 < \beta < 1$, tal que

$$\langle DF(x,y)(h,k),(h,k)\rangle \geq \beta(h^2+k^2) \quad \text{para todo} \quad (x,y),(h,k) \in \mathbf{R}^2.$$

Aqui $\langle .,. \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbf{R}^2$.

3. (a) (1,0) Enuncie o Teorema da Função Inversa para funções diferenciáveis de várias variáveis.

(b) (1,0) Seja A um aberto de $\mathbf{R}^n$, e seja $f : A \to \mathbf{R}^n$ uma função injetiva de classe C^1 tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Prove que $f(A)$ é aberto em $\mathbf{R}^n$ e que $f^{-1} : f(A) \to A$ é diferenciável.

4. Seja $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^1 tal que $Dg(a,b) \neq 0$ para todo $(a,b) \in g^{-1}(0)$. Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável que atinge seu máximo sobre $g^{-1}(0)$ num ponto (a,b). Prove que existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$Df(a,b) = \lambda Dg(a,b).$$

5. (a) (0,5) Enuncie o Teorema de Fubini.

(b) (1,5) Seja A um aberto de $\mathbf{R}^2$, seja $f : A \to \mathbf{R}$, e suponhamos que as derivadas parciais $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}$ e $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}$ existam e sejam contínuas em A. Usando o Teorema de Fubini prove que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}(x,y) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}(x,y) \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in A.$$

Sugestão: Supondo que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}(x_0,y_0) > \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}(x_0,y_0)$$

para algum $(x_0, y_0) \in A$, prove que existe um retângulo $[a,b] \times [c,d]$ em A contendo (x_0, y_0) tal que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}}(x,y) - \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}(x,y) > \epsilon > 0$$

para todo $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$.

Exame de Qualificação do Mestrado

Análise no $\mathbf{R}^n$

MM - 720

17/12/01

1. Seja $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uma transformação linear.

(a) Prove que as seguintes condições são equivalentes:

(*) $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$.

(**) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbf{R}^n$.

(b) Se T verifica as condições em (a), prove que a imagem de T tem dimensão n.

2. Seja $f : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ uma aplicação bilinear. Prove que f é diferenciável em cada ponto $(x, y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ e que

$$Df(x,y)(s,t) = f(x,t) + f(s,y)$$

para todo $(s,t) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$.

3. Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função tal que

$$|f(x,y)| \leq (x^2 + y^2)^p$$

para todo $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, onde $p > 1/2$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

4. Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^1.

(a) Se f for injetiva, prove que existe um aberto $A \subset \mathbf{R}^2$ tal que

(*) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in A$
ou
(**) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in A$.

(b) Usando (a) prove que f não pode ser injetiva.

Sugestão: Se (*) for verdadeira, aplique o Teorema da Função Inversa à função $F : A \to \mathbf{R}^2$ definida por $F(x,y) = (f(x,y), y)$.

5. Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ uma função contínua, com $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínua. Seja

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx.$$

(a) Prove que

$$F(y) - F(y_0) = \int_a^b \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dydx.$$

(b) Prove que

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx.$$

Exame de Qualificação do Mestrado

Topologia Geral

03/08/01

X e Y denotam espaços topológicos.

1. (a) (1,0) Defina espaço topológico separável. Se X é separável e $f : X \to Y$ é contínua, prove que $f(X)$ é separável.

(b) (1,0) Defina espaço topológico de Lindelöf. Prove que cada subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é Lindelöf.

2. (2,0) Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos conexos de X. Seja A um subconjunto conexo de X tal que $A \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Prove que o conjunto $A \cup (\cup_{i\in I} A_i)$ é conexo. Enuncie de maneira clara os teoremas utilizados.

3. (a) (0,5) Defina quando $f, g \in C(X;Y)$ são homotópicas entre si.

(b) (0,5) Defina espaço topológico contrátil.

(c) (1,0) Se X e Y são espaços contráteis, prove que o espaço produto $X \times Y$ é contrátil.

4. (a) (0,5) Defina espaço topológico normal.

(b) (1,5) Seja X um espaço normal, e sejam A e B dois fechados disjuntos de X. Aplicando duas vezes a definição de espaço normal, prove a existência de dois abertos U e V de X tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$.

5. (a) (0,5) Defina espaço topológico compacto.

(b) (1,5) Sejam K e L subconjuntos compactos de X e Y, respectivamente, e seja W um aberto de $X \times Y$ tal que $K \times L \subset W$. Prove que existem um aberto U de X e um aberto V de Y tais que $K \times L \subset U \times V \subset W$.

Exame de Qualificação do Mestrado

Topologia Geral

MM-733

19/12/01

1. Seja X um espaço topológico de Hausdorff.

(a) (1,0) Dados um compacto $K \subset X$ e um ponto $b \in X \setminus K$, prove que existem dois abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que $K \subset U$ e $b \in V$.

(b) (1,0) Dados dois compactos disjuntos $K, L \subset X$, prove que existem dois abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que $K \subset U$ e $L \subset V$.

2.(a) (0,5) Defina espaço topológico normal.

(b) (1,5) Prove que cada espaço métrico é normal.

3. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) (1,0) Prove que S^1 e o intervalo $[0, 1]$ não são homeomorfos entre si.

(b) (1,0) Prove que os intervalos $(0, \infty)$ e $[0, \infty)$ não são homeomorfos entre si.

4. Seja O_n o conjunto de todas as matrizes reais A de $n \times n$ tais que $AA^t = A^tA = I$. Consideremos O_n como um subespaço de $\mathbf{R}^{n^2}$.

(a) (0,5) Prove que $(\det A)^2 = 1$ para cada $A \in O_n$.

(b) (1,5) Prove que O_n não é conexo.

5. Seja X um espaço topológico, e sejam a, b, c tres pontos de X.

(a) (0,5) Se f e g são dois caminhos em X entre a e b, defina quando $f \simeq g\ [\{0, 1\}]$.

(b) (1,5) Sejam f_1 e g_1 dois caminhos em X entre a e b, e sejam f_2 e g_2 dois caminhos em X entre b e c. Se $f_1 \simeq g_1\ [\{0, 1\}]$ e $f_2 \simeq g_2\ [\{0, 1\}]$, prove que $f_1 * f_2 \simeq g_1 * g_2\ [\{0, 1\}]$.

Exame de Qualificação, Mestrado

MM-719, Álgebra Linear

30 de julho de 2001

Questão 1. Seja $V = \mathbb{C}^4$ o espaço vetorial de dimensão 4 sobre os complexos, e seja e_1, e_2, e_3, e_4 uma base de V. A transformação linear T em V tem a matriz A em relação à base dada,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Achar uma base de Jordan para T e a matriz de T em relação à base de Jordan.

Questão 2. Seja $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ uma forma quadrática em três variáveis. Achar uma transformação invertível das variáveis que reduz f a uma somatória de quadrados.

Questão 3. Seja $V = \mathbb{C}^n$ com o produto escalar usual, e seja G um conjunto de transformações unitárias em V. Mostrar que se as transformações em G comutam dois a dois, então existe uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores para **toda** transformação de G.

Questão 4. Sejam A e B duas matrizes de ordem n sobre os reais, tais que $AB = 0$.

a) Mostrar que $p(A) + p(B) \leq n$, onde $p(X)$ é o posto da matriz X.

b) Se o número n é ímpar, pelo menos uma das matrizes $A + A^t$ e $B + B^t$ não é invertível.

Questão 5. Responda **falsa** ou **verdadeira** à cada uma das perguntas abaixo. Justifique as suas respostas.

a) Se V é um espaço vetorial de dimensão 5, a álgebra exterior $E = E(V)$ de V é de dimensão 25.

b) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz de ordem n com entradas complexas e $A^4 = I$, então $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ pode ser um bloco de Jordan na forma canônica de A. (Aqui $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.)

c) Se T é uma transformação linear em $\mathbb{C}^n$, então T possui um subespaço invariante de dimensão $n - 1$.

d) Sejam A, B, C matrizes de ordem 2, então

$$(AB - BA)^2C - C(AB - BA)^2 = 0.$$

Boa prova!

Exame de Qualificação ao Mestrado

MM-719, Álgebra Linear

14 de dezembro de 2001

Questão 1. (2 pt) Seja $V = \mathbb{C}^3$ o espaço vetorial de dimensão 3 sobre os complexos, e seja e_1, e_2, e_3, uma base de V. A transformação linear T em V tem a matriz A com relação à base dada,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $b \neq 0$. Achar uma base de Jordan para T e a matriz de T em relação à base de Jordan.

Questão 2. (2 pt) Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ sobre os complexos, com forma canônica de Jordan J.

a) Qual a forma canônica da transposta A^T de A?

b) Mostrar que existe uma matriz invertível X de ordem $n \times n$ tal que $X^{-1}AX = A^T$.

Questão 3. (2 pt) Seja $V = \mathbb{R}^n$ e seja T uma transformação linear em V tal que $T^2 = T$. Mostrar que ela é normal se e somente se $\ker T \perp \operatorname{Im} T$.

Questão 4. (1 pt) Dar um exemplo de um espaço vetorial V sobre um corpo infinito K tal que V não seja isomorfo ao seu espaço dual V^*. Justifique a sua resposta.

Questão 5. (4 pt) Responda **falsa** ou **verdadeira** à cada uma das perguntas abaixo. Justifique as suas respostas.

a) Existe uma matriz antisimétrica de ordem $n \times n$ tal que se $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X^T AY \neq 0$ implica $\{X, Y\}$ linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.

b) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz antisimétrica 4×4, então o Pfafiano $Pf(A)$ é dado pela fórmula $Pf(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

c) Dois espaços simpléticos da mesma dimensão são isométricos.

d) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, existem matrizes invertíveis B e C tais que $BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e) Um operador f em $lin(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ é diagonalizável com respeito a uma base unitária se e somente se f é normal.

f) Seja A uma matriz nilpotente e 17×17, com $\dim\ker A = 6$, $\dim\ker A^2 = 10$, $\dim\ker A^3 = 13$ e $\dim\ker A^4 = 15$. Então o polinômio mínimo de A pode ser x^4.

g) Se f e g são duas transformações autoadjuntas em $\mathbb{R}^n$, $fg = gf$, então existe **uma** base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que consiste de autovetores de f e de g.

h) Se f é uma transformação linear em $\mathbb{C}^n$, então $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{C}^n$.

Boa prova!