AI Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X, cuja distribuição é dada por

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{2}{\beta^2 - \alpha^2} x I_{(\alpha,\beta)}(x), \quad 0 \leq \alpha < \beta,$$

[05] a. Encontre uma estatística suficiente e minimal.

[07] b. Para $\alpha = 0$, mostre que $\widehat{\beta} = (\frac{2n+1}{2n})X_{(n)}$ é um estimador não viciado uniformemente de mínima variância de β.

[06] c. O estimador $\widehat{\beta}$ dado em b) é consistente? Justifique.

[07] d. Considere que β é conhecido. Encontre o estimador de α pelo método dos momentos.

AII Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X, cuja distribuição é dada por

$$f(x|\theta) = \theta(x+1)^{-(1+\theta)} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0,$$

[05] a. Discuta a existência de uma estatística suficiente e completa para θ. Justifique sua resposta.

[08] b. Encontre o LIDCR para um estimador não viciado de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

[07] c. Encontre um teste UMP para testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

de nível α.

[05] d. Obtenha a distribuição assintótica do EMV de $\tau(\theta)$ definido em b).

BII. Considere que o tempo de vida de um certo tipo de lâmpada pode ser considerado como exponencial. N lâmpadas são submetidas a uma tensão v_1, N a uma tensão v_2 e N a uma tensão v_3 com $v_1 = av_2 = a^2v_3$, com a fixo. Denote por β_i o tempo médio de vida da lâmpada quando submetido a uma tensão β_i, $i = 1, 2, 3$. Um modelo postula que $\beta_2^2 = \beta_1 * \beta_3$, isto é, que o tempo médio sob tensão v_2 é uma média geométrica entre os tempos médios de vida sob tensões v_1 e v_3.

[15] a. Encontre o valor p do teste de Wald quando $\overline{x}_1 = 10$, $\overline{x}_2 = 2$, $\overline{x}_3 = 1$, $N = 20$ e a hipótese nula é escrita da forma $H_0 : \beta_2^2 = \beta_1 * \beta_3$

[04] b. Mostre que a estatística de Wald modificaria se escrevêssemos a hipótese nula através da forma $H_0 : \beta_2 = \sqrt{\beta_1 * \beta_3}$. Comente este resultado.

[02] c. Comente se você esperaria encontrar diferenças também caso utilizasse os testes da razão de verossimilhança generalizada e o teste do escore.

[04] d. Exiba as equações a serem resolvidas para se estimar o modelos sob a hipótese nula.

BI. Considere que o número de crias durante um ano, das fêmeas de um certo animal, em idade de procriação, seja igual a zero, 1 ou 2. Um experimento consistiu em observar o número de crias, durante um ano, de 100 animais observando-se $n_0 = 60$, $n_1 = 12$ e $n_2 = 28$, onde n_i, $i = 0, 1, 2$ é o número de animais com i crias. Um modelo postula que $p_1 = p$, $p_2 = 2p$ e que $p_0 = 1 - 3p$. , p_i = prob. um animal ter i crias durante 1 ano

[10] a. Baseado nos dados observados verifique utilizando o teste da rzão de verosimilhnaça, se o modelo pode ser rejeitado ao nível de significância igual a 10%.

[6] b. Calcule o valor-p do teste uniformemente mais poderoso para testar

$$H_0 : p \geq 0,17 \quad \text{vs} \quad H_a : p < 0,17$$

[09] c. A estatística de Wald é dada por

$$Q_W = n g^\top(\widehat{\theta})[(\frac{\partial g^\top(\widehat{\theta})}{\partial \theta})^\top I_F^{-1}(\widehat{\theta}) \frac{\partial g^\top(\widehat{\theta})}{\partial \theta}]^{-1} g(\widehat{\theta})$$

para uma amostra aleatória. Encontre os termos na estatística de Wald para testar se o modelo é adequado.

Nota: Se você conhecer os estimadores sob as hipóteses nula e/ou alternativa pode utilizar sem provar, mas você assume o risco de utilizat o estimador incorreto.

CI. Seja X uma v.a. com função densidade

$$f(x|\theta, \beta) = \theta e^{-\theta(x-\beta)} I_{(\beta,\infty)}(x), \quad \theta, \beta > 0,$$

Para uma amostra aleatória de tamanho n $X_1, \cdots, X_n$:

[07] a. Obtenha o EMV de θ e β.(Não precisa discutir rigorosamente que EMV é um ponto de máximo)

[06] b. Considere que β é conhecido e α tem distribuição à priori dada por

$$\pi(\theta) = e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta).$$

Determine o estimador de Bayes considerando a perda quadrática.

[06] c. Sob as condições dadas em b), obtenha o intervalo de credibilidade de 95% para θ.

[06] d. Para as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$, obtenha para $n = 1$ o fator de Bayes definida por

$$\frac{P(x|H_1)}{P(x|H_0)} = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)}$$

CII. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de X, cuja distribuição é dada por

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\beta^{\alpha} I_{(\beta,\infty)}(x), \quad \alpha, \beta > 0,$$

com β conhecido.

[07] a. Determine o EMV de α e denote este por $\widehat{\alpha}$

[06] b. Mostre que

$$[\frac{\widehat{\alpha}}{2n}\chi^2_{2n,a_1}; \frac{\widehat{\alpha}}{2n}\chi^2_{2n,1-a_2}],$$

com $a_1 + a_2 = \alpha_0$, $0 < \alpha_0 < 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, é um intervalo de confiança de nível $1-\alpha_0$. Note que $\chi^2_{2n,a}$ é tal que $P(Z \leq \chi^2_{2n,a}) = a$ e $Z \sim \chi^2_{2n}$.

Sugestão: Considere a transformação $X = \beta e^Y$ e a v.a. $\alpha/\widehat{\alpha}$.

[07] c. Obtenha um teste com boas propriedades para testar $H_0 : \alpha = 1 \quad vs \quad H_1 : \alpha > 1$ com nível de significância de 5%. Justifique a escolha do teste.

[05] d. Seja $F(y;\alpha,\beta)$ a função de distribuição acumulada de X. Para estimar $F(y;\alpha,\beta)$, para $y > \beta$, considere os estimadores

$$S_1 = F(y;\widehat{\alpha},\beta) \quad e \quad S_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(\beta,y)}(X_i).$$

Encontre a distribuição assintótica de S_1 e S_2. Justifique sua resposta.

CIII. Considere que o tempo de vida de um certo tipo de lâmpada pode ser considerado como exponencial com tempo médio inversamente proporcional à voltagem aplicada. Em um experimento são utilizadas 3 lâmpadas submetidas simultanemanente, no início do experimento, a uma voltagem v_0. Assim que a primeira lâmpada queima a voltagem aplicada às lâmpadas restantes é duplicada. Quando a segunda lâmpada queima a voltagem passa a ser igual a $3v_0$. Denote por Y_1 o tempo até a primeira lâmpada queimar e por Y_i, $i = 2,3$ o tempo decorrido entre a (i-1)-ésima e i-ésima lâmpada queimar as variáveis observadas. Denote por β o tempo médio de vida da lâmpada quando submetido a uma voltagem v_0

[05] a. Dê a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias Y_1, Y_2 e Y_3. Mencione se você utilizou alguma suposição adicional.

[05] b. Encontre uma estatística suficiente e completa.

[8] c. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para β e discuta suas propriedades otimais.

[7] d. Encontre um IC 90% para a taxa de falha $\lambda = 1/\beta$.

Nota: Pode utilizar sem provar as seguites propriedade da distribuição exponencial:
a. falta de memória.
b. Se $X_1, \cdots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população exponencial com taxa de falha λ então $X_{(1)}$ também tem distribuição exponencial com taxa de falha $n\lambda$